arXiv:math/0610320v2 [math.GT] 18 Sep 2008

SUSPENSION THEOREMS FOR LINKS AND LINK MAPS

MIKHAIL SKOPENKOV

Abstract. We present a new short proof of the explicit formula for the group of links (and also link maps) in the 'quadruple point free' dimension. Denote by $L^m_{p,q}$ (respectively, C^{m-p}_p) the group of smooth embeddings $S^p \sqcup S^q \to S^m$ (respectively, $S^p \to S^m$) up to smooth isotopy. Denote by $LM^m_{p,q}$ the group of link maps $S^p \sqcup S^q \to S^m$ up to link homotopy.

Theorem 1. *If $p \le q \le m-3$ and $2p+2q \le 3m-6$ then*

$$L^m_{p,q} \cong \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \pi_{p+q+2-m}(SO/SO_{m-p-1}) \oplus C^{m-p}_p \oplus C^{m-q}_q.$$

Theorem 2. *If $p, q \le m-3$ and $2p+2q \le 3m-5$ then $LM^m_{p,q} \cong \pi^S_{p+q+1-m}$.*

Our approach is based on the use of the suspension operation for links and link maps, and *suspension theorems* for them.

1. Introduction

This paper[1] is on knotting problem of higher dimensional manifolds (for recent surveys see [21, 24]). We study knots and links in codimension at least 3, where a complete answer can sometimes be obtained, in contrast to the classical situation of simple closed curves in $\mathbb{R}^3$.

Denote by $L^m_{p,q}$ the set of smooth embeddings $S^p \sqcup S^q \to S^m$ up to smooth isotopy. Denote by C^{m-p}_p the set of smooth embeddings $S^p \to S^m$ up to smooth isotopy. For $p, q \le m-3$ these sets are commutative groups with respect to 'componentwise connected sum' operation [8].

The main result of this paper is a new short proof of an explicit formula for the group $L^m_{p,q}$ in terms of the groups C^{m-p}_p, C^{m-q}_q and certain homotopy groups:

Theorem 1.1. *If $p \le q \le m-3$ and $2p+2q \le 3m-6$ then*

$$L^m_{p,q} \cong \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \pi_{p+q+2-m}(V_{M+m-p-1,M}) \oplus C^{m-p}_p \oplus C^{m-q}_q.$$

Here $V_{M+l,M}$ is the *Stiefel manifold* of M-frames at the origin of $\mathbb{R}^{M+l}$, where M is large. Many of the groups $\pi_n(V_{M+l,M})$ and C^{m-p}_p are known [20, 7].

Example 1.2. $L^6_{3,3} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 57Q45, 57R40; Secondary: 55P40, 57Q30.

Key words and phrases. link, link map, link homotopy, homotopy groups, Stiefel manifold, suspension, the EHP sequence, engulfing, linking number, alpha-invariant, beta-invariant.

The author was supported in part by INTAS grant 06-1000014-6277, Russian Foundation of Basic Research grants 05-01-00993-a, 06-01-72551-NCNIL-a, 07-01-00648-a, President of the Russian Federation grant NSh-4578.2006.1, Agency for Education and Science grant RNP-2.1.1.7988, and Moebius Contest Foundation for Young Scientists.

[1]Journal reference: PROC. AMER. MATH. SOC. 137 (2009), 359–369.

Theorem 1.1 is the strongest available *explicit* classification of 2-component links in spheres. However, for arbitrary $p,q \le m-3$ there is a famous exact sequence involving the groups $L^m_{p,q}$, certain homotopy groups and maps between them involving Whitehead products (see [8, Theorem 1.1] and [5]).

Theorem 1.1 was proved in [8, Theorems 10.7 and 2.4] (under stronger restrictions $p \le q$ and $p+3q \le 3m-7$; however, the Haefliger argument can be extended to cover our dimension range — see Remark 3.7). The second inequality in Theorem 1.1 is sharp (see Remark 3.6).

We reduce the classification of links to the classification of link maps, which is an interesting problem in itself [22, 13, 6].

A link map is a continuous map $f : X \sqcup Y \to Z$ such that $fX \cap fY = \emptyset$. *A link homotopy* is a continuous family of link maps $f_t : X \sqcup Y \to Z$. Denote by $LM^m_{p,q}$ the set of link maps $S^p \sqcup S^q \to S^m$ up to link homotopy. For $p,q \le m-3$ this set is a commutative group with respect to 'componentwise connected sum' operation (by [22, p. 187], [12, Remark 2.4] and 'link concordance implies link homotopy' theorem cited below).

The second result of this paper is a short proof of the following theorem:

Theorem 1.3. [6] *If* $p,q \le m-3$ *and* $2p+2q \le 3m-5$ *then* $LM^m_{p,q} \cong \pi^S_{p+q-m+1}$.

The isomorphism is the α-invariant (see §3). The second inequality is sharp [6].

Theorem 1.3 is the strongest known explicit classification of link maps for $p,q \le m-3$. However, under slightly weaker dimension restriction there is an exact sequence involving the groups $LM^m_{p,q}$ and certain bordism groups [13, Theorem A].

Our approach is based on the use of the suspension map. *The suspension map* $\Sigma : LM^m_{p,q} \to LM^{m+1}_{p+1,q}$ is defined by suspending the p-component and including the q-component. It is easy to see that for M large $LM^{m+M}_{p+M,q} \cong \pi^S_{p+q-m+1}$ [12]. Thus Theorem 1.3 follows from the following assertion:

Theorem 1.4 (Suspension theorem for link maps)**.** [6] *If* $p,q \le m-3$ *then the suspension map is bijective for* $2p+2q \le 3m-5$ *and surjective for* $2p+2q \le 3m-4$.

This theorem has been known earlier only as a corollary of Theorem 1.3. We give a short direct proof of Theorem 1.4 analogous to Zeeman's proof of the higher-dimensional Poincaré conjecture and using a version of Alexander's trick. Our proof is almost self-contained, we use only 'concordance implies isotopy' theorem.

Let us introduce some notions and conventions.

An embedding $f : X \times I \to S^m \times I$ is *a concordance* if $X \times 0 = f^{-1}(S^m \times 0)$ and $X \times 1 = f^{-1}(S^m \times 1)$. We tacitly use the facts that in codimension at least 3 *concordance implies isotopy* and *any concordance or isotopy is ambient* [9].

Similarly, *a link concordance* is a continuous map $f : (X \sqcup Y) \times I \to S^m \times I$ such that $f(X \times I) \cap f(Y \times I) = \emptyset$, $(X \sqcup Y) \times 0 = f^{-1}(S^m \times 0)$ and $(X \sqcup Y) \times 1 = f^{-1}(S^m \times 1)$. In codimension at least 3 *link concordance implies link homotopy,* which was announced in [17], cf. [1, 16, 14], and proved in [18].

We say that a link map $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ is *null link concordant*, if it extends to a link map $D^{p+1} \sqcup D^{q+1} \to D^{m+1}$. The latter link map is called *null link concordance.*

This paper is organized as follows. In §2 we prove Theorem 1.4. In §3 we deduce Theorem 1.1 from Theorem 1.4. Sections §2 and §3 can be read independently from each other.

In [2, 3] (cf. [23]) a similar approach is applied to the classification of embeddings $S^p \times S^q \to S^m$.

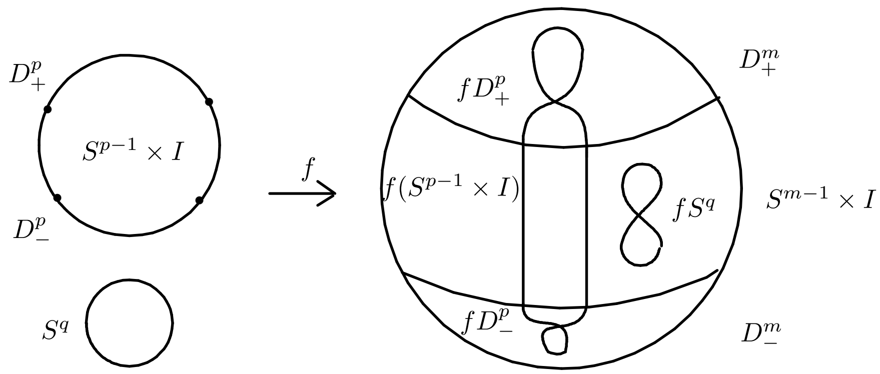

FIGURE 1. A standardized link map

2. Classification of link maps

We prove Theorem 1.4 as follows. First we prove the surjectivity in case $p \le q$. Then we prove analogously the injectivity in case $p \le q$, and finally we deduce the case $p > q$ of Theorem 1.4 from the case $p \le q$.

Let us introduce our main notion and state our main lemma.

Definition 2.1. (see Figure 1) Let $S^k = D^k_+ \cup (S^{k-1}\times I) \cup D^k_-$ be the standard decomposition of the sphere, where $\partial D^k_+ = S^{k-1}\times 0 = S^{k-1}$ is the equator of S^k. A link map $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ is *standardized* if the following 3 conditions hold:

(1) $fD^p_+ \subset D^m_+, \quad fD^p_- \subset D^m_-, \quad f(S^{p-1}\times I) \subset S^{m-1}\times I$;
(2) $fS^q \subset S^{m-1}\times I$;
(3) $f(S^{p-1}\times I)$ is *straight*, i. e. $f(S^{p-1}\times I) = f(S^{p-1}\times 0)\times I$.

Lemma 2.2. *Suppose that $p \le q+1$, $p \le m-3$ and $2p+2q \le 3m-5$; then any link map $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ is link homotopic to a standardized link map.*

Proof of the surjectivity in 1.4 for $p \le q$ modulo 2.2. Take a link map $f : S^{p+1} \sqcup S^q \to S^{m+1}$. Let us modify it to a suspension by a link homotopy.

By Lemma 2.2 we may assume that f is standardized.

Push fS^q along the fibers of $S^m \times I$ until it lies in $S^m \times 0 = \partial D^{m+1}_+$. After that transform fD^{p+1}_+ and $f(S^{p+1} - \operatorname{Int} D^{p+1}_+)$ to the cones over $f\partial D^{p+1}_+$ in D^{m+1}_+ and in $S^{m+1} - \operatorname{Int} D^{m+1}_+$, respectively (by a rectilinear link homotopy). The obtained link map is the suspension of a link map $S^p \sqcup S^q \to S^m$. $\square$

Now we proceed to the proof of Lemma 2.2. First we prove it for $p \le q$, then for $p = q+1$. The proofs of all technical claims below can be skipped for the first reading. From now till the end of §2 we work in piecewise linear category.

Proof of Lemma 2.2 for $p \le q$. Let us make a generic link map $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ standardized by performing certain homeomorphisms $S^p \to S^p$ and $S^m \to S^m$. (Formally, performing homeomorphisms $h_p : S^p \to S^p$ and $h_m : S^m \to S^m$ means a link homotopy transforming f to $h_m \circ f \circ (h_p^{-1} \sqcup \mathrm{Id}_{S^q})$.)

(1) *Construction of the homeomorphism $S^p \to S^p$: splitting the sphere S^p.* (The Zeeman engulfing, see Figure 2 to the left.) Consider the self-intersection set of

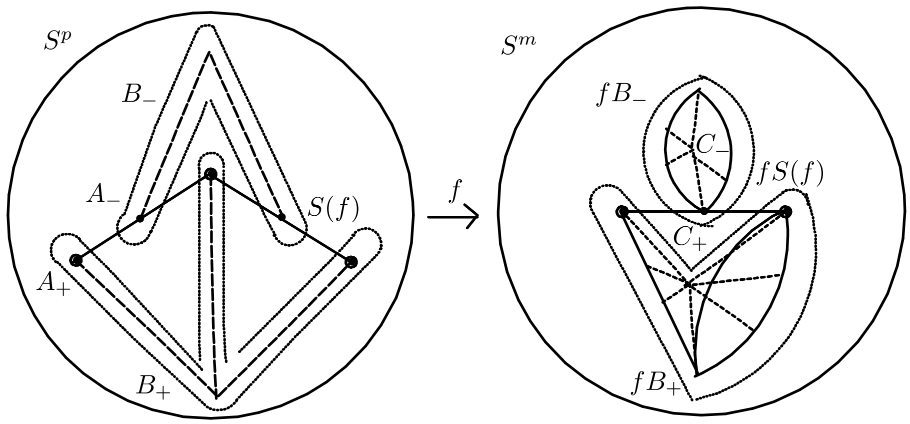

FIGURE 2. Splitting of the spheres S^p and S^m

the p-component $S(f) = \mathrm{Cl}\{\, x \in S^p : |f^{-1}fx| \geq 2\,\}$. Let A_+ be the skeleton of $S(f)$ formed by the simplices of dimension not greater than $\frac{1}{2}\dim S(f)$ (in a triangulation of S^p, S^q and S^m such that $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ is simplicial). Let A_- be the subcomplex dual to A_+ (i. e., A_- is the subcomplex formed by all simplices σ of the first barycentric subdivision of $S(f)$ such that $\sigma \cap A_+ = \emptyset$).

Claim 2.3. *There exist subpolyhedra $B_\pm \subset S^p$ such that $B_\pm \supset A_\pm$ and $B_\pm \cong CA_\pm$.*

Proof. Generically $\dim S(f) \leq 2p - m$, so $\dim A_\pm \leq p - [\frac{m+1}{2}]$. Take generic extensions $i_\pm : CA_\pm \to S^p$ of the inclusions $A_\pm \hookrightarrow S^p$. They are embeddings, because $2(p-[\frac{m+1}{2}]+1)-p < 0$ by the assumption $p \leq m-3$. Put $B_\pm = i_\pm CA_\pm$. $\square$

Claim 2.4. *Generically $B_+ \cap B_- = \emptyset$ and $B_\pm \cap S(f) = A_\pm$.*

Proof. This follows from $\dim(B_+ \cap B_-) \leq 2(p - [\frac{m+1}{2}] + 1) - p < 0$ and

$\dim(B_\pm - A_\pm) \cap S(f) \leq (p - \left[\frac{m+1}{2}\right] + 1) + (2p - m) - p \leq \frac{1}{2}(2q + 2p - 3m + 4) < 0,$

which is a corollary of the assumptions $p \leq q + 1$ and $2p + 2q \leq 3m - 5$. $\square$

Take disjoint regular neighborhoods of $B_\pm$ in S^p. Perform an orientation-preserving homeomorphism $S^p \to S^p$ taking these neighbourhoods to the balls of the standard decomposition $S^p = D^p_+ \cup (S^{p-1} \times I) \cup D^p_-$.

(2) *Construction of the 1st homeomorphism $S^m \to S^m$: splitting the sphere S^m.* (See Figure 2 to the right.) Take subpolyhedra $C_\pm \subset S^m$ such that $C_\pm \supset fB_\pm$ and $C_\pm \cong CfB_\pm$ (constructed analogously to Claim 2.3).

Claim 2.5. *Generically $C_+ \cap C_- = \emptyset$, $C_\pm \cap fS^p = fB_\pm$ and $C_\pm \cap fS^q = \emptyset$.*

Proof. This follows from the inequalities $2(p - [\frac{m+1}{2}] + 2) - m < 0$, which holds by the assumption $p \leq m-3$, and $\dim(C_\pm - fB_\pm) \cap fS^p \leq (p-[\frac{m+1}{2}]+2)+p-m < 0$, which holds by the assumptions $p \leq q$ and $2p+2q \leq 3m-5$, and $\dim(C_+ \cap fS^q) \leq (p - [\frac{m+1}{2}] + 2) + q - m < 0$, which is equivalent to $2p + 2q \leq 3m - 5$. $\square$

Take disjoint regular neighborhoods of $C_\pm \cup fD^p_\pm$ relatively $f\partial D^p_\pm$ in $S^m - fS^q$. Perform a homeomorphism $S^m \to S^m$ taking them to the balls of the standard decomposition $S^m = D^m_+ \cup (S^{m-1}\times I) \cup D^m_-$. By Claim 2.5 the obtained link map satisfies properties (1) and (2) of a standardized link map (see Definition 2.1).

To satisfy property (3) perform the following homeomorphism $S^m \to S^m$.

(3) *Construction of the 2nd homeomorphism $S^m \to S^m$: straightening $f(S^{p-1}\times I)$.*

Claim 2.6. *There is a homeomorphism $S(f)\cap(S^{p-1}\times I) \cong (S(f)\cap(S^{p-1}\times 0))\times I$ taking $S(f)\cap(S^{p-1}\times j)$ to $(S(f)\cap(S^{p-1}\times 0))\times j$ for $j=0,1$.*

Proof. Take the first barycentric subdivision of the triangulation from step (1). Then each simplex $\sigma\subset S(f)$ such that $\sigma \not\subset A_+\cup A_-$ is the join of two simplices $\sigma_+\subset A_+$ and $\sigma_-\subset A_-$. By Claim 2.4 the polyhedra $\sigma\cap D^p_\pm$ are regular neighborhoods of $\sigma_\pm$ in σ. So there is a natural homeomorphism $\sigma\cap(S^{p-1}\times I)\cong(\sigma\cap(S^{p-1}\times 0))\times I$. Combining such homeomorphisms for all simplices $\sigma\subset S(f)$ such that $\sigma\not\subset A_+\cup A_-$, we get the required homeomorphism $S(f)\cap(S^{p-1}\times I)\cong(S(f)\cap(S^{p-1}\times 0))\times I$. $\square$

Claim 2.7. *There is a homeomorphism $f(S^{p-1}\times I)\cong f(S^{p-1}\times 0)\times I$ taking $f(S^{p-1}\times j)$ to $f(S^{p-1}\times 0)\times j$ for $j=0,1$.*

Proof. (The Alexander trick) By Claim 2.6 the inclusion $i: S(f)\cap(S^{p-1}\times I)\hookrightarrow S^{p-1}\times I$ is a concordance. Perform an ambient isotopy of $S^{p-1}\times I$ making i an isotopy. Since any isotopy is ambient, there is a homeomorphism $h: S^{p-1}\times I\to S^{p-1}\times I$ such that $h(S(f)\cap(S^{p-1}\times I))$ is straight, i. e. is equal to $h(S(f)\cap(S^{p-1}\times 0))\times I$. The required homeomorphism $f(S^{p-1}\times I)\cong f(S^{p-1}\times 0)\times I$ is the quotient of h. (Analogously to the proof of 2.6 it can be checked that this quotient is well-defined.) $\square$

Claim 2.8. *There is a homeomorphism of $S^{m-1}\times I$ making $f(S^{p-1}\times I)$ straight.*

Proof. By Claim 2.7 the inclusion $i: f(S^{p-1}\times I)\hookrightarrow S^{m-1}\times I$ is a concordance. Arguing as in the proof of Claim 2.7 we get the required homeomorphism. $\square$

Perform a homeomorphism $S^m\to S^m$ extending the one given by Claim 2.8. The obtained link map is standardized, so for $p\le q$ Lemma 2.2 is proved. $\square$

Proof of Lemma 2.2 for $p=q+1$. The proof is analogous to the proof in case $p\le q$, only the cones $B_\pm$ and $C_\pm$ should be replaced by collapsible polyhedra given by the following claim, cf. [9]. $\square$

Claim 2.9. *There are collapsible subpolyhedra $B_\pm\subset S^p$ and $C_\pm\subset S^m$ satisfying Claims 2.4 and 2.5.*

Proof. (The Irwin trick) Let $\bar B_\pm$ be the polyhedra given by Claim 2.3. Define $\bar C_\pm$ analogously. These polyhedra satisfy all the required properties except $\bar C_\pm\cap fS^p = f\bar B_\pm$. By the inequality $\dim(\bar C_\pm - f\bar B_\pm)\cap fS^p\le(p-[\frac{m+1}{2}]+2)+p-m\le 0$ the set $(\bar C_\pm - f\bar B_\pm)\cap fS^p$ (if nonempty) consists of finitely many points not belonging to $S(f)$. Join each of these points with $\bar B_\pm$ by a generic arc in S^p. Let $B_\pm$ be the union of these arcs and the cone $\bar B_\pm$. Adding appropriate cones over $f(B_\pm-\bar B_\pm)$ to $\bar C_\pm$, we get a collapsible polyhedron $C_\pm\subset S^m$ such that $\dim(C_\pm-\bar C_\pm)\le 2$. The polyhedra $B_\pm$ and $C_\pm$ are the required. $\square$

The injectivity in Theorem 1.4 is proved by a relative version of the above argument. A *standardized* link map $f: D^p\sqcup D^q\to D^m$ is defined as in 2.1, only we fix the standard decomposition of the *disc* $D^k = D^k_+\cup(D^{k-1}\times I)\cup D^k_-$ instead of the *sphere*. Denote by $D^{k-1}_\pm = D^k_\pm\cap\partial D^k$. Assume that ∂D^{k-1}_+ is the equator of ∂D^k.

Lemma 2.10. *Suppose that $p \le q+1$, $p \le m-3$ and $2p+2q \le 3m-5$. Then any generic proper link map $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$, whose restriction to the boundary is a suspension, is link homotopic (relatively the boundary) to a standardized link map.*

Proof of the injectivity in 1.4 for $p \le q$ modulo 2.10. It suffices to prove that if the suspension of a link map $f_0 : S^p \sqcup S^q \to S^m$ is null link concordant then the link map f_0 is null link concordant. Take a null link concordance $f : D^{p+2} \sqcup D^{q+1} \to D^{m+2}$ of Σf_0. By Lemma 2.10 we may assume that the link map f is standardized.

Push fD^{q+1} along the fibers of $D^{m+1} \times I$ toward ∂D^{m+2}_+ until it lies in $\partial D^{m+2}_+ - \partial D^{m+2}$. The restriction of the obtained link map to $\mathrm{Cl}(\partial D^{p+2}_+ - \partial D^{p+2}) \sqcup D^{q+1}$ is the required null link concordance of the link map f_0. $\square$

Proof of Lemma 2.10. The proof is analogous to the proof of Lemma 2.2 with the following modifications. Let $\hat{D}^k$ be the ball obtained from D^k by attaching two cones $CD^{k-1}_\pm$ along $D^{k-1}_\pm$. Let $\hat{f} : \hat{D}^p \sqcup \hat{D}^q \to \hat{D}^m$ be the obvious extension of the link map $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$. Clearly, it suffices to make the link map $\hat{f}$ standardized (performing homeomorphisms of $\hat{D}^p$ and $\hat{D}^m$ fixed on the boundary).
(1) *Construction of a homeomorphism $\hat{D}^p \to \hat{D}^p$ for $p \le q$.* Let A_+ be the union of ∂D^{p-1}_+ and all simplices of $S(f)$ having the dimension not greater than $\frac{1}{2}\dim S(f)$. Let A_- be the subcomplex dual to A_+.

Claim 2.11. *There are subpolyhedra $B_\pm \subset D^p$ collapsible to $B_\pm \cap D^{p-1}_\pm$ and satisfying Claim 2.4.*

Proof. Take a generic homotopy $i_t : A_\pm \to D^p$ fixed on $A_\pm \cap D^{p-1}_\pm$, such that $i_0 : A_\pm \hookrightarrow D^p$ is the inclusion and $i_1 A_\pm \subset D^{p-1}_\pm$. Let $B_\pm$ be the trace of i_t. $\square$

Take appropriate regular neighborhoods of $B_\pm \cup C(B_\pm \cap D^{p-1}_\pm)$ in $D^p \cup CD^{p-1}_\pm$. Perform a homeomorphism $\hat{D}^p \to \hat{D}^p$ fixed on the boundary, taking them to the balls of the standard decomposition of $\hat{D}^p$.

Steps (2) and (3) from the proof of Lemma 2.2 are modified analogously. $\square$

Thus we have proved Theorem 1.4 for $p \le q$.

Proof of Theorem 1.4 for $p > q$. The map Σ is surjective as the composition

$$LM^m_{p,q} \xrightarrow{\Sigma^{p-q}} LM^{m+p-q}_{p,p} \xrightarrow{\Sigma} LM^{m+p-q+1}_{p+1,p} \xrightarrow{(\Sigma^{p-q})^{-1}} LM^{m+1}_{p+1,q},$$

in which all the maps are well-defined and surjective by the case $p \le q$ of Theorem 1.4. The injectivity of Σ is proved analogously. $\square$

3. Classification of links

We prove Theorem 1.1 as follows. First we prove a suspension theorem for links (Theorem 3.1) reducing the classification of links to the classification of *disc link maps*. Then we simplify the group of disc link maps, and find it using the classification of link maps. Formally, 1.1 follows from 1.4, 3.2, 3.3, 3.5 and 5-lemma.

Let us introduce some notation. Throughout §3 we work in smooth category.

Denote by $\widehat{L}^m_{p,q}$ the group of concordance classes of embeddings $S^p \sqcup S^q \to S^m$, whose restrictions both to S^p and to S^q are unknotted.

An *almost link* is a link map $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ whose restriction to S^q is an unknotted embedding. An *almost concordance* is a link concordance $(S^p \sqcup S^q) \times I \to$

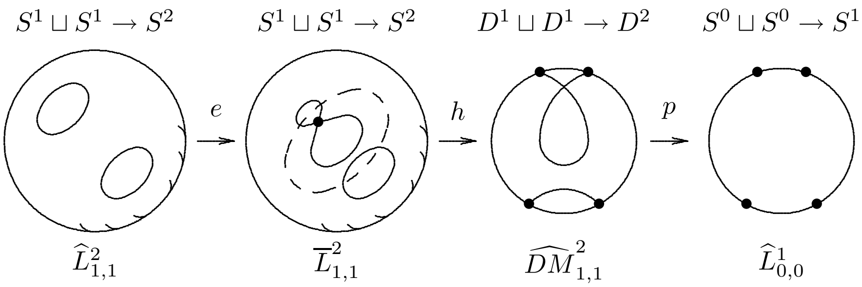

FIGURE 3. Geometric EHP sequence for links

$S^m \times I$, whose restriction to $S^q \times I$ is a concordance. Let $\overline{L}^m_{p,q}$ be the set of almost links up to almost concordance. For $p, q \le m-3$ this set is a commutative group with respect to 'componentwise connected sum' operation. It is not difficult to see that this group is isomorphic to $\pi_p(S^{m-q-1})$ (cf. Definition of λ below).

A *disc link map* is a proper link map $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$ whose restriction to $(\partial D^p) \sqcup D^q$ is an embedding and $f : \partial D^p \to \partial D^m$ is unknotted. A *disc link concordance* is a proper link concordance $(D^p \sqcup D^q) \times I \to D^m \times I$, whose restriction to $(\partial D^p \sqcup D^q) \times I$ is a concordance. Let $\widehat{DM}^m_{p,q}$ be the set of disc link maps up to disc link homotopy. For $p, q \le m-3$ it has a natural commutative group structure.

Theorem 3.1 (Geometric EHP sequence for links)**.** (A. Skopenkov, cf. [19], [7, Theorem 1.9], see Figure 3) *For $p, q \le m-3$ there is an exact sequence*:

$$\dots \longrightarrow \widehat{L}^m_{p,q} \xrightarrow{e} \overline{L}^m_{p,q} \xrightarrow{h} \widehat{DM}^m_{p,q} \xrightarrow{p} \widehat{L}^{m-1}_{p-1,q-1} \longrightarrow \dots$$

Proof. Construction of the homomorphisms. Let e be the obvious map. Let p be the 'restriction to the boundary' map. The map h is the 'cutting' homomorphism defined as follows. Take a generic almost link $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$. Take a generic pair of points $x \in fS^p$ and $y \in fS^q$ and join them by a path l meeting $f(S^p \sqcup S^q)$ only at ∂l. Let $\bar{D}^m$ be the complement to a small neighborhood of l in S^m. Denote by $\bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q = f^{-1}\bar{D}^m$. Set $h(f)$ to be the restriction of f to a map $\bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q \to \bar{D}^m$.

Proof of the exactness. We have $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} e$ because a link $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ extends to a disc link map $D^{p+1} \sqcup D^{q+1} \to D^{m+1}$ if and only if it is almost concordant to a trivial link. We have $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} p$ because a disc link map $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$ extends without adding new self-intersections to an almost link $S^p \sqcup S^q \to S^m$ if and only if the restriction of f to the boundary is null-concordant.

To prove $\operatorname{Im} e \subset \operatorname{Ker} h$, take a proper embedding $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$. Take a pair of points $x \in D^p$ and $y \in D^q$. Join fx and fy by an arc l meeting $f(D^p \sqcup D^q)$ only at ∂l. Let $\bar{D}^m$ be a small neighborhood of l in S^m. Denote by $\bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q = f^{-1}\bar{D}^m$. The restriction $f : (D^p - \bar{D}^p) \sqcup (D^q - \bar{D}^q) \to (D^m - \bar{D}^m)$ is a concordance. By 'concordance implies isotopy' theorem we may assume that this restriction is level-preserving. Then the Alexander trick shows that the embedding $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$ is ambient isotopic to the restriction $f : \bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q \to \bar{D}^m$. The latter embedding is trivial, thus $h \circ e = 0$.

To prove $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Im} e$, take $f \in \overline{L}^m_{p,q}$ such that $h(f) = 0$. By definition, there exist a disc link concordance c between $h(f)$ and an embedding. We may assume that the restriction of c to the boundary is an isotopy. By isotopy extension theorem

[9] it extends to an ambient isotopy of the disc $S^m - \bar{D}^m$ (from the above definition of the map h). So c can be extended to an almost concordance between f and a link $f' \in \widehat{L}^m_{p,q}$. Hence $f = e(f')$. $\square$

Corollary 3.2. *$L^m_{p,q} \cong C^{m-p}_p \oplus C^{m-q}_q \oplus \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \widehat{DM}^{m+1}_{p+1,q+1}$ for $p \le q \le m-3$.*

Proof. By [8, Th. 2.4] we have $L^m_{p,q} \cong \widehat{L}^m_{p,q} \oplus C^{m-p}_p \oplus C^{m-q}_q$. So it suffices to show that for $p \le q$ the homomorphism $e : \widehat{L}^m_{p,q} \to \overline{L}^m_{p,q}$ has a right inverse. The required right inverse $\pi_p(S^{m-q-1}) \to \widehat{L}^m_{p,q}$ was constructed in [8, Th. 10.1]: it takes the class of a map $\phi : S^p \to S^{m-q-1}$ to a link $f : S^p \sqcup S^q \to D^{q+1} \times S^{m-q-1} \subset S^m$ given by the formula $f(x \sqcup y) = (\frac{1}{2}x; \phi x) \sqcup (y; c)$, where $c \in S^{m-q-1}$ is fixed. $\square$

Let us simplify the group $\widehat{DM}^m_{p,q}$. Define $\overline{DM}^m_{p,q}$ to be the group of proper link maps $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$ whose restriction $f : \partial D^p \to \partial D^m$ is an unknotted embedding (up to link concordance whose restriction to $\partial D^p \times I$ is a concordance).

Lemma 3.3. *If $p, q \le m-3$ then the natural map $\widehat{DM}^m_{p,q} \to \overline{DM}^m_{p,q}$ is bijective for $2p + 2q \le 3m - 5$ and surjective for $2p + 2q \le 3m - 4$.*

Proof. The surjectivity. Take a generic link map $f \in \overline{DM}^m_{p,q}$. The pair $(D^m - fD^p, \partial D^m - f\partial D^p)$ is $(2m-2p-3)$-connected, because $H_i(D^m - fD^p, \partial D^m - f\partial D^p) \cong H^{m-i-1}(fD^p) = 0$ for $i \le 2m - 2p - 3$ (because fD^p is homotopy equivalent to the mapping cone of the restriction $f : S(f) \to fS(f)$, having the dimension at most $2p - m + 1$, cf. [6, Lemma 4.2]). Thus by the assumptions $q \le m-3$, $2p+2q \le 3m-4$ and the embedding theorem moving the boundary [9] the restriction $f|_{D^q} : (D^q, \partial D^q) \to (D^m - fD^p, \partial D^m - f\partial D^p)$ is homotopic to an embedding. So f belongs to the image of the natural map $\widehat{DM}^m_{p,q} \to \overline{DM}^m_{p,q}$.

The injectivity. Take a generic link concordance $f : (D^p \sqcup D^q) \times I \to D^m \times I$, whose restriction to $D^q \times \partial I \cup \partial D^p \times I$ is an embedding. It suffices to remove the self-intersection of $D^q \times I$ by a link homotopy fixed on $(D^p \sqcup D^q) \times \partial I$. It is possible by the following theorem proved similarly to [9], because the pair $(D^m \times I - f(D^p \times I), \partial D^m \times I - f(\partial D^p \times I))$ is $(2m-2p-3)$-connected. $\square$

Theorem 3.4 (Embedding theorem moving a part of the boundary)**.** *Let M^{m+1}, $Y^m \subset \partial M$ and $X^q \subset \partial D^{q+1}$ be compact manifolds. Let $f : (D^{q+1}, X) \to (M, Y)$ be a proper map such that $f|_{\partial D^{q+1} - X}$ is an embedding. If $q \le m-3$ and $(M; Y)$ is $(2q-m+2)$-connected, then f is properly homotopic* rel $\partial D^{q+1} - X$ *to an embedding.*

Let us find the group $\overline{DM}^m_{p,q}$. Denote by $n = p + q + 1 - m$. We are going to define a homomorphism $\beta : \overline{DM}^m_{p,q} \to \pi_n(V_{M+m-p-1,M})$. The following theorem and 5-lemma imply the bijectivity of this homomorphism.

Theorem 3.5. (A. Skopenkov, cf. [13, Th. 3.1], [11, Lemma 5.1], [12, Th. 4.8]) *For $p, q \le m-3$ and $3p + q \le 3m - 5$ there is the following diagram with exact lines, commutative up to sign*:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\overline{L}^m_{q,p} & \xrightarrow{e} & LM^m_{p,q} & \xrightarrow{h} & \overline{DM}^m_{p,q} & \xrightarrow{p} & \overline{L}^{m-1}_{q-1,p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \\
\pi_q(S^{m-p-1}) & \xrightarrow{E} & \pi^S_n & \xrightarrow{H} & \pi_n(V_{M+m-p-1,M}) & \xrightarrow{P} & \pi_{q-1}(S^{m-p-1}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Proof. The top line is defined analogously to Theorem 3.1 (with similar proof of the exactness). The bottom line is the stable James EHP sequence, for which we use the following geometric construction [15, §1 and §4], cf. [10, 25, 4].

Construction of the EHP sequence. Identify the groups $\pi_q(S^{m-p-1})$ and π_n^S with the groups of framed embeddings and immersions, respectively, of closed n-manifolds into S^q (up to framed cobordism). A *proper immersion* is a proper framed immersion of an n-manifold into D^q, whose restriction to the boundary is an embedding. A *proper cobordism* is a proper framed immersion $c : N^{n+1} \to D^q \times I$, whose restriction to $c^{-1}(S^{q-1} \times I)$ is an embedding. By [15, Prop. 4.1] we can identify $\pi_n(V_{M+m-p-1,M})$ with the group of proper immersions up to proper cobordism.

Let $E : \pi_q(S^{m-p-1}) \to \pi_n^S$ be the obvious map and let $P : \pi_n(V_{M+m-p-1,M}) \to \pi_q(S^{m-p-1})$ be 'restriction to the boundary' map. Let $H : \pi_n^S \to \pi_n(V_{M+m-p-1,M})$ be cutting homomorphism, defined by removing small discs from an immersed n-manifold and the sphere S^q.

Construction of the vertical homomorphisms. Remove a point from S^m and identify the result with $\mathbb{R}^m$. For a link map $f : X \sqcup Y \to \mathbb{R}^m$ define the map $\tilde f : X \times Y \to S^{m-1}$ by the formula $\tilde f(x,y) = \frac{fx-fy}{|fx-fy|}$. Denote by $\mathrm{pr} : X \times Y \to Y$ the obvious projection.

Definition of α. (cf. [12]) Let $f : S^p \sqcup S^q \to \mathbb{R}^m$ be a generic link map. Take a regular value $v \in S^{m-1}$ of the map $\tilde f$. Let $\alpha(f)$ be the cobordism class of the framed immersion $\mathrm{pr} : \tilde f^{-1}v \to S^q$. (Clearly, α commutes with Σ, hence by 1.4 and [12, Th. 2.13] α is an isomorphism for $p, q \le m-3$ and $2p + 2q \le 3m - 5$.)

Definition of λ. (cf. [8]) Take a generic link map $f \in \bar L^m_{q,p}$. The complement $S^m - fS^p$ retracts to a sphere S^{m-p-1} bounding a normal disc to fS^p. Assume that the sphere S^{m-p-1} is standard. Put the image fS^q into the sphere S^{m-p-1} by an appropriate link homotopy $\mathrm{rel}\, S^p$. Take a regular value $v \in S^{m-p-1}$ of the map $\tilde f$. Let $\lambda(f)$ be the cobordism class of the framed embedding $\mathrm{pr} : \tilde f^{-1}v \to S^q$.

Definition of β. (cf. [13]) Take a generic proper disc link map $f : D^p \sqcup D^q \to \mathbb{R}^m_+$, where $\mathbb{R}^m_+$ is the upper half-space. By a proper link homotopy, restricting to an isotopy of ∂D^p, one can put the image $f\partial D^q$ into the standard sphere S^{m-p-1}. Take a regular value $v \in S^{m-p-1}$ of $\tilde f$. Let $\beta(f)$ be the proper cobordism class of the framed proper immersion $\mathrm{pr} : \tilde f^{-1}v \to D^q$.

Thus the required diagram is constructed. The commutativity up to sign is checked directly. □

Remark 3.6. The restriction $2p + 2q \le 3m - 6$ in Theorem 1.1 is best possible, the formula fails for $2p + 2q = 3m - 5$. For example, take $m = p + 4 = 4k - 1$, $k \ge 5$, $q = 2k + 1$. Then the group $LM^{m+1}_{p+1,q+1}$ is infinite [13, p. 755-756]. Thus by 3.3 and 3.5 $\mathrm{rk}\, \widehat{DM}^{m+1}_{p+1,q+1} \ge \mathrm{rk}\, \overline{DM}^{m+1}_{p+1,q+1} > \mathrm{rk}\, \pi_{p+q+2-m}(V_{M+m-p-1,M})$. So by 3.2 the rank of the left-hand side in the formula of 1.1 is greater than the rank of the right-hand side.

Remark 3.7. The argument of [8] can be extended to prove Theorem 1.1 at least for $2p_1 + 2p_2 \le 3m - 7$ (here we use the notation of [8]). Indeed, the only step of that proof, in which this restriction is not sufficient, is [8, Proposition 10.2]. Since the group $\Lambda^{(q)}_{p_1}$ (respectively, $\Pi^{(q)}_{m-2}$) is generated by $\theta_k(i_1, i_2)$ (respectively, $[[i_2, i_1], i_2]$ and $\theta_{k+1}(i_1, i_2)$) for all $k \ge 0$ such that $kp_1 + p_2 \ge (k+1)(m-2)$, the proposition follows. A possible reason why this improvement was not noticed in [8] was that the restriction $2p_1+2p_2 \le 3m-7$ did not appear there in contrast to $3p_1+p_2 \le 3m-7$.

Acknowledgements. The author is grateful to A. Skopenkov for constant attention to this work and to the referee for useful suggestions.

References

1. A. Bartels, P. Teichner, *All two dimensional links are null homotopic*, Geom. Topol. **3** (1999), p. 235–252.
2. M. Cencelj, D. Repovs, M. Skopenkov, *Homotopy type of the complement to an immersion and classification of embeddings of tori*, Rus. Math. Surv. **62:5** (2007), p. 985–987, arXiv:0803.4285v1[math.GT].
3. M. Cencelj, D. Repovs, M. Skopenkov, *Knotted tori and the beta-invariant*, preprint.
4. P. Eccles, *Multiple points of codimension one immersions*, Lect. Notes Math. **788** (1980), p. 23–38.
5. N. Habegger, *Knots and links in codimension greater than 2*, Topol. **25:3** (1986), p. 253–260.
6. N. Habegger, U. Kaiser, *Link homotopy in the 2-metastable range*, Topol. **37:1** (1998), p. 75–94.
7. A. Haefliger, *Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q>2$*, Ann. Math., Ser.3 **83** (1966) p. 402–436.
8. ———, *Enlacements de spheres en codimension superiure a 2*, Comm. Math. Helv. **41** (1966-67), p. 51–72 (in French).
9. J. F. P. Hudson, *Piecewise-linear topology*, Benjamin, New York-Amsterdam 1969.
10. I. M. James, *On the iterated suspension*, Quart. J. Math. Oxford **5** (1954), p. 1–10.
11. M. Kervaire, *An interpretation of G. Whitehead's generalization of H. Hopf's invariant*, Ann. Math. **69** (1959), p. 345–362.
12. U. Koschorke, *Link maps and the geometry of their invariants*, Manuscripta Math. **61:4** (1988), p. 383–415.
13. ———, *On link maps and their homotopy classification*, Math. Ann. **286:4** (1990), p. 753–782.
14. ———, *A generalization of Milnor's μ-invariants to higher dimensional link maps*, Topology **36:2** (1997), p. 301–324.
15. U. Koschorke, B. Sanderson, *Geometric interpretation of the generalized Hopf invariant*, Math. Scand. **41** (1977), p. 199–217.
16. V. Krushkal, P. Teichner, *Alexander duality, gropes and link homotopy,* Geom. Topol. **1** (1997), p. 51–69.
17. S. Melikhov, *Link concordance implies link homotopy in codimension* ≥ 3, Uspekhi Mat. Nauk **55:3** (2000), p. 183–184 (in Russian).
18. ———, *Link concordance implies link homotopy in codimension* ≥ 3, preprint.
19. V. Nezhinsky, *A suspension sequence in link theory*, Izv. Akad. Nauk **48:1** (1984), p. 126–143 (in Russian).
20. G.F. Paechter, *The groups $\pi_r(V_{n,m})$*, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, **7** (1956), p. 249–268.
21. D. Repovs and A. Skopenkov, *New results on embeddings of polyhedra and manifolds into Euclidean spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **54:6** (1999), p. 61–109 (in Russian).
22. G. P. Scott, *Homotopy links*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **32** (1968), p. 186–190.
23. A. Skopenkov, *Classification of embeddings below the metastable dimension*, submitted, arXiv:math/0607422[math.GT].
24. ———, *Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces*, *in*: *Surveys in Contemporary Mathematics*, *Ed. N. Young and Y. Choi*, London Math. Soc. Lect. Notes **347** (2007), p. 248–342, arXiv:math/0604045[math.GT].
25. A. Szücs, *Cobordism group of l-immersions*, Acta Math. Hungar. **28** (1976), p. 93-102 (in Russian).

Department of Differential Geometry, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, 119992, Moscow, Russia.

E-mail address: `skopenkov@rambler.ru`

ТЕОРЕМЫ О НАДСТРОЙКЕ ДЛЯ ЗАЦЕПЛЕНИЙ И СИНГУЛЯРНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Михаил Скопенков

arXiv:math/0610320v2 [math.GT] 18 Sep 2008

Аннотация. Мы приводим новое короткое доказательство явной формулы для группы зацеплений (а также сингулярных зацеплений) в размерности, 'свободной от четырехкратных точек'. Обозначим через $L^m_{p,q}$ (соответственно, через C^{m-p}_p) группу гладких вложений $S^p \sqcup S^q \to S^m$ (соответственно, $S^p \to S^m$) с точностью до гладкой изотопии. Обозначим через $LM^m_{p,q}$ группу сингулярных зацеплений $S^p \sqcup S^q \to S^m$ с точностью до сингулярной гомотопии.

Теорема 1. *Если $p \le q \le m-3$ и $2p+2q \le 3m-6$, то*

$$L^m_{p,q} \cong \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \pi_{p+q+2-m}(SO/SO_{m-p-1}) \oplus C^{m-p}_p \oplus C^{m-q}_q.$$

Теорема 2. *Если $p, q \le m-3$ и $2p+2q \le 3m-5$, то $LM^m_{p,q} \cong \pi^S_{p+q+1-m}$.*

Наш подход основан на использовании операции надстройки для зацеплений и сингулярных зацеплений, и *теорем о надстройке* для них.

1. Введение

Данная статья[1] посвящена проблеме заузливания многомерных многообразий (актуальные обзоры по данной теме можно найти в статьях [21, 24]). Мы изучаем узлы и зацепления в коразмерности по крайней мере 3, в которой иногда удается получить полный ответ, в отличие от классической ситуации простых замкнутых кривых в $\mathbb{R}^3$.

Обозначим через $L^m_{p,q}$ множество гладких вложений $S^p \sqcup S^q \to S^m$ с точностью до гладкой изотопии. Обозначим через C^{m-p}_p множество гладких вложений $S^p \to S^m$ с точностью до гладкой изотопии. При $p, q \le m-3$ эти множества — коммутативные группы относительно операции 'покомпонентной связной суммы' [8].

Основной результат данной статьи — новое короткое доказательство явной формулы для группы $L^m_{p,q}$ в терминах групп C^{m-p}_p, C^{m-q}_q и некоторых гомотопических групп:

Теорема 1.1. *Если $p \le q \le m-3$ и $2p+2q \le 3m-6$, то*

$$L^m_{p,q} \cong \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \pi_{p+q+2-m}(V_{M+m-p-1,M}) \oplus C^{m-p}_p \oplus C^{m-q}_q.$$

Здесь $V_{M+l,M}$ — *многообразие Штифеля* M-реперов в начале координат пространства $\mathbb{R}^{M+l}$, где число M достаточно велико. Многие из групп $\pi_n(V_{M+l,M})$ и C^{m-p}_p явно вычислены [20, 7].

Пример 1.2. $L^6_{3,3} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Теорема 1.1 является наиболее сильной известной *явной* классификацией 2-компонентных зацеплений в сферах. Однако для произвольных $p, q \le m-3$ имеется знаменитая точная последовательность, включающая группы $L^m_{p,q}$, некоторые гомотопические группы и отображения между ними, включающие произведения Уайтхеда (см. [8, Theorem 1.1] и [5]).

Теорема 1.1 была доказана в [8, Теоремы 10.7 и 2.4] (при более сильном ограничении $p \le q$ и $p+3q \le 3m-7$; однако, рассуждение Хэфлигера может быть обобщено, чтобы покрыть и наш диапазон размерностей, см. Замечание 3.7). Второе неравенство в Теореме 1.1 является точным (см. Замечание 3.6).

Мы сводим классификацию зацепленей к классификации сингулярных зацеплений, которая является интересной задачей и сама по себе [22, 13, 6].

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57Q45, 57R40; 55P40, 57Q30.

Key words and phrases. Зацепление, сингулярное зацепление, сингулярная гомотопия, гомотопические группы, многообразие Штифеля, надстройка, EHP последовательность, поглощение, коэффициент зацепления, альфа-инвариант, бета-инвариант.

Автор частично поддержан грантом INTAS 06-1000014-6277, Российским Фондом Фундаментальных исследований, гранты 05-01-00993-a, 06-01-72551-NCNIL-a, 07-01-00648-a, грантом Президента Российской Федерации НШ-4578.2006.1, грантом Министерством Образования и Науки РНП-2.1.1.7988, и Фондом поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса».

[1]Ссылка на данную статью: PROC. AMER. MATH. SOC. 137 (2009), 359–369.

Сингулярное зацепление — это непрерывное отображение $f : X \sqcup Y \to Z$ такое, что $fX \cap fY = \emptyset$. *Сингулярная гомотопия* — это непрерывное семейство сингулярных зацеплений $f_t : X \sqcup Y \to Z$. Обозначим через $LM^m_{p,q}$ множество сингулярных зацеплений $S^p \sqcup S^q \to S^m$ с точностью до сингулярной гомотопии. При $p, q \le m-3$ это множество — коммутативная группа относительно операции 'покомпонентной связной суммы' (согласно [22, p. 187], [12, Remark 2.4] и теореме 'сингулярная конкордантность влечет сингулярную гомотопию', ссылка на которую приводится ниже в этом пункте).

Второй результат данной статьи — короткое доказательство следующей теоремы:

Теорема 1.3. [6] *Если $p, q \le m - 3$ и $2p + 2q \le 3m - 5$, то*

$$LM^m_{p,q} \cong \pi^S_{p+q-m+1}.$$

Данный изоморфизм — это α-инвариант (его определение дано в §3). Второе неравенство в данной теореме — точное [6].

Теорема 1.3 является самой сильной известной явной классификацией сингулярных зацеплений при $p, q \le m - 3$. Однако при немного более слабом ограничении на размерности имеется точная последовательность, включающая группу $LM^m_{p,q}$ и некоторые группы бордизмов [13, Theorem A].

Наш подход к классификации зацеплений и сингулярных зацеплений основан на использовании отображения надстройки. *Отображение надстройки*

$$\Sigma : LM^m_{p,q} \to LM^{m+1}_{p+1,q}$$

определяется, как надстройка p-компоненты и включение q-компоненты. Легко видеть, что при достаточно большом M имеется изоморфизм $LM^{m+M}_{p+M,q} \cong \pi^S_{p+q-m+1}$ [12]. Таким образом, Теорема 1.3 следует из такого утверждения:

Теорема 1.4 (Теорема о надстройке для сингулярных зацеплений)**.** [6] *Если $p, q \le m - 3$, то отображение надстройки биективно при $2p + 2q \le 3m - 5$ и сюръективно при $2p + 2q \le 3m - 4$.*

Эта теорема была известна ранее только как следствие Теоремы 1.3. В данной статье приводится короткое прямое доказательство Теоремы 1.4, аналогичное доказательству Зимана многомерной гипотезы Пуанкаре, и использующее версию трюка Александера. Наше доказательство почти самодостаточно, мы опираемся только на теорему "конкордантность влечет изотопию".

Мы будем использовать следующие понятия и соглашения.

Вложение $f : X \times I \to S^m \times I$ называется *конкордантностью*, если $X \times 0 = f^{-1}(S^m \times 0)$ и $X \times 1 = f^{-1}(S^m \times 1)$. В дальнейшем молчаливо используются факты, что в коразмерности по крайней мере 3 *конкордантность влечет изотопию* и *любая конкордантность или изотопия объемлема* [9].

Аналогично, *сингулярная конкордантность* — это непрерывное отображение $f : (X \sqcup Y) \times I \to S^m \times I$ такое, что $f(X \times I) \cap f(Y \times I) = \emptyset$, $(X \sqcup Y) \times 0 = f^{-1}(S^m \times 0)$ и $(X \sqcup Y) \times 1 = f^{-1}(S^m \times 1)$. В коразмерности по крайней мере 3 *сингулярная конкордантность влечет сингулярную гомотопию*, что было анонсировано в статье [17], сравни с [1, 16, 14], и доказано в статье [18].

Мы говорим, что сингулярное зацепление $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ *нуль-конкордантно*, если оно продолжается до сингулярного зацепления $D^{p+1} \sqcup D^{q+1} \to D^{m+1}$. Последнее сингулярное зацепление мы называем *нуль-конкордантностью*.

Данная статья организована следующим образом. В §2 мы доказываем Теорему 1.4. В §3 мы выводим Теорему 1.1 из Теоремы 1.4. Разделы §2 и §3 можно читать независимо друг от друга.

В статьях [2, 3] (сравни с [23]) разработанный подход применяется к классификации вложений $S^p \times S^q \to S^m$.

2. Классификация сингулярных зацеплений

Мы доказываем Теорему 1.4 следующим образом. Сначала мы доказываем сюръективность в случае $p \le q$. Затем мы доказываем аналогичным образом инъективность в случае $p \le q$, и, наконец, мы выводим случай $p > q$ Теоремы 1.4 из случая $p \le q$. (Заметим, что утверждение Теоремы 1.4 не симметрично относительно p и q).

Введем основное понятие, используемое в доказательстве, и сформулируем основную лемму.

Определение 2.1. (см. иллюстрацию 1) Пусть $S^k = D^k_+ \cup (S^{k-1} \times I) \cup D^k_-$ — стандартное разбиение сферы, где $\partial D^k_+ = S^{k-1} \times 0 = S^{k-1}$ — экватор сферы S^k. Будем говорить, что сингулярное зацепление $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ *стандартизовано*, если выполнены следующие 3 условия:

(1) $fD^p_+ \subset D^m_+, \quad fD^p_- \subset D^m_-, \quad f(S^{p-1} \times I) \subset S^{m-1} \times I$;
(2) $fS^q \subset S^{m-1} \times I$;
(3) $f(S^{p-1} \times I)$ *прямолинейно*, то есть $f(S^{p-1} \times I) = f(S^{p-1} \times 0) \times I$.

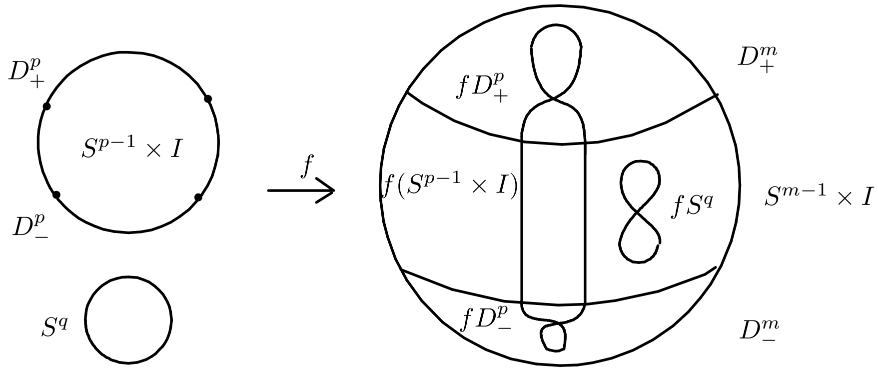

Рис. 1. Стандартизованное сингулярное зацепление

Лемма 2.2. *Предположим, что $p \le q+1$, $p \le m-3$ и $2p+2q \le 3m-5$; тогда любое сингулярное зацепление $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ сингулярно гомотопно стандартизованному сингулярному зацеплению.*

Доказательство сюръективности в 1.4 по модулю 2.2 при $p \le q$. (Коническая конструкция) Рассмотрим произвольное сингулярное зацепление $f : S^{p+1} \sqcup S^q \to S^{m+1}$. Наша цель — превратить его в надстройку с помощью сингулярной гомотопии.

По Лемме 2.2 мы можем предположить, что f стандартизовано.

Сдвинем образ fS^q вдоль образующих цилиндра $S^m \times I$, пока он не попадет в основание $S^m \times 0 = \partial D^{m+1}_+$. После этого продеформируем fD^{p+1}_+ и $f(S^{p+1} - \operatorname{Int} D^{p+1}_+)$ в конусы над сферой $f\partial D^{p+1}_+$ внутри дисков D^{m+1}_+ и $S^{m+1} - \operatorname{Int} D^{m+1}_+$, соответственно (с помощью сингулярной гомотопии, прямолинейной как внутри D^{m+1}_+, так и внутри $S^{m+1} - \operatorname{Int} D^{m+1}_+$). Полученное сингулярное зацепление — надстройка над некоторым сингулярным зацеплением $S^p \sqcup S^q \to S^m$. Значит $f \in \operatorname{Im}\Sigma$, что и требовалось. □

Теперь мы переходим к доказательству Леммы 2.2. Сначала мы докажем ее для $p \le q$, затем — для $p = q+1$. Доказательства всех технических утверждений ниже могут быть пропущены при первом прочтении. С этого момента до конца §2 мы работаем в кусочно-линейной категории.

Доказательство Леммы 2.2 при $p \le q$. Наша цель — сделать данное сингулярное зацепление общего положения $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ стандартизованным, производя подходящие гомеоморфизмы $S^p \to S^p$ и $S^m \to S^m$. (Формально, 'произвести гомеоморфизмы $h_p : S^p \to S^p$ и $h_m : S^m \to S^m$' означает 'произвести сингулярную гомотопию, превращающую f в $h_m \circ f \circ (h_p^{-1} \sqcup \operatorname{Id})$').

(1) *Построение гомеоморфизма $S^p \to S^p$: разбиение сферы S^p.* (Метод поглощения Зимана, см. иллюстрацию 2 слева). Рассмотрим множество самопересечения p-компоненты: $S(f) = \operatorname{Cl}\{\, x \in S^p : |f^{-1}fx| \ge 2 \,\}$. Пусть A_+ — остов комплекса $S(f)$, сформированный симплексами размерности не больше $\frac{1}{2}\dim S(f)$ (в такой триангуляции сфер S^p, S^q и S^m, что отображение $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ симплициально). Пусть A_- — подкомплекс, двойственный к A_+ (то есть, A_- — подкомплекс, образованный всеми симплексами σ первого барицентрического подразделения комплекса $S(f)$ такими, что $\sigma \cap A_+ = \emptyset$).

Утверждение 2.3. *Существуют подполиэдры $B_\pm \subset S^p$, такие что $B_\pm \supset A_\pm$ и $B_\pm \cong CA_\pm$.*

Доказательство. По общему положению $\dim S(f) \le 2p - m$, таким образом, $\dim_\pm \le p - [\frac{m+1}{2}]$. Возьмем продолжения общего положения $i_\pm : CA_\pm \to S^p$ включений $A_\pm \hookrightarrow S^p$. Они являются вложениями, потому что $2(p - [\frac{m+1}{2}] + 1) - p < 0$ ввиду предположения $p \le m-3$. Остается положить $B_\pm = i_\pm CA_\pm$. □

Утверждение 2.4. *В общем положении $B_+ \cap B_- = \emptyset$ и $B_\pm \cap S(f) = A_\pm$.*

Доказательство. Это следует из неравенств $\dim(B_+ \cap B_-) \le 2(p - [\frac{m+1}{2}] + 1) - p < 0$ и

$$\dim(B_\pm - A_\pm) \cap S(f) \le (p - \left[\tfrac{m+1}{2}\right] + 1) + (2p - m) - p \le \tfrac{1}{2}(2q + 2p - 3m + 4) < 0,$$

последнее из которых является следствием предположений $p \le q+1$ и $2p + 2q \le 3m - 5$. □

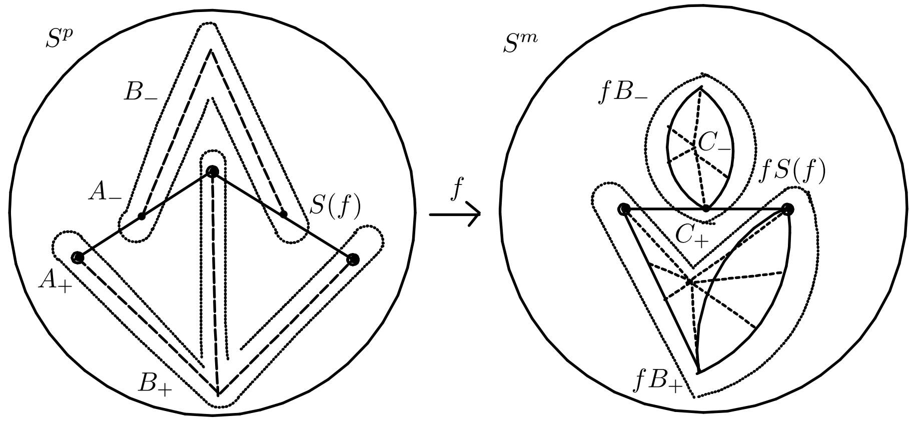

Рис. 2. Разбиения сфер S^p и S^m

Возьмем непересекающиеся регулярные окрестности полиэдров $B_\pm$ в сфере S^p. Произведем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $S^p \to S^p$, переводящий эти окрестности в шары стандартного разбиения $S^p = D^p_+ \cup (S^{p-1} \times I) \cup D^p_-$.

Гомеоморфизм $h^m : S^m \to S^m$, который мы собираемся построить, будет композицией двух гомеоморфизмов $S^m \to S^m$, определяемых следующим образом.

(2) *Построение 1-ого гомеоморфизма $S^m \to S^m$: разбиение сферы S^m.* (См. иллюстрацию 2 справа). Возьмем подполиэдры $C_\pm \subset S^m$ такие, что $C_\pm \supset fB_\pm$ и $C_\pm \cong CfB_\pm$ (они строятся аналогично полиэдрам $B_\pm$ из Утверждения 2.3).

Утверждение 2.5. *В общем положении $C_+ \cap C_- = \emptyset$, $C_\pm \cap fS^p = fB_\pm$ и $C_\pm \cap fS^q = \emptyset$.*

Доказательство. Это следует из неравенств $2(p - [\frac{m+1}{2}] + 2) - m < 0$, которое выполняется в силу предположения $p \le m-3$, и $\dim(C_\pm - fB_\pm) \cap fS^p \le (p - [\frac{m+1}{2}] + 2) + p - m < 0$, которое выполняется в силу предположений $p \le q$ и $2p + 2q \le 3m - 5$, и $\dim(C_+ \cap fS^q) \le (p - [\frac{m+1}{2}] + 2) + q - m < 0$, которое эквивалентно $2p+2q \le 3m-5$. (Это - единственное место в нашем доказательстве, в котором ограничение $2p + 2q \le 3m - 5$ является точным). $\square$

Возьмем непересекающиеся регулярные окрестности полиэдров $C_\pm \cup fD^p_\pm$ относительно $f\partial D^p_\pm$ в многообразии $S^m - fS^q$. Произведем гомеоморфизм $S^m \to S^m$, переводящий эти окрестности в шары стандартного разбиения $S^m = D^m_+ \cup (S^{m-1} \times I) \cup D^m_-$. В силу Утверждения 2.5 полученное сингулярные зацепление удовлетворяет свойствам (1) и (2) стандартизованного сингулярного зацепления (см. Определение 2.1).

Чтобы удовлетворить свойству (3), произведем следующий гомеоморфизм $S^m \to S^m$.

(3) *Построение 2-ого гомеоморфизма $S^m \to S^m$: выпрямление множества $f(S^{p-1} \times I)$.*

Утверждение 2.6. *Существует гомеоморфизм $S(f) \cap (S^{p-1} \times I) \cong (S(f) \cap (S^{p-1} \times 0)) \times I$, переводящий $S(f) \cap (S^{p-1} \times j)$ в $(S(f) \cap (S^{p-1} \times 0)) \times j$ при каждом $j = 0, 1$.*

Доказательство. Возьмем первое барицентрическое подразделение триангуляции из шага (1) выше. Каждый симплекс $\sigma \subset S(f)$ такой, что $\sigma \not\subset A_+ \cup A_-$ является джойном пары симплексов $\sigma_+ \subset A_+$ и $\sigma_- \subset A_-$. Согласно Утверждению 2.4 полиэдры $\sigma \cap D^p_\pm$ являются регулярными окрестностями граней $\sigma_\pm$ в симплексе σ. Таким образом, существует естественный гомеоморфизм $\sigma \cap (S^{p-1} \times I) \cong (\sigma \cap (S^{p-1} \times 0)) \times I$. Объединения такие гомеоморфизмы для всех симплексов $\sigma \subset S(f)$ таких, что $\sigma \not\subset A_+ \cup A_-$ (в порядке возрастания размерностей симплексов σ), мы получим требуемый гомеоморфизм $S(f) \cap (S^{p-1} \times I) \cong (S(f) \cap (S^{p-1} \times 0)) \times I$. $\square$

Утверждение 2.7. *Существует гомеоморфизм $f(S^{p-1} \times I) \cong f(S^{p-1} \times 0) \times I$, переводящий $f(S^{p-1} \times j)$ в $f(S^{p-1} \times 0) \times j$ при каждом $j = 0, 1$.*

Доказательство. (Трюк Александера) Согласно Утверждению 2.6 включение $i : S(f) \cap (S^{p-1} \times I) \hookrightarrow S^{p-1} \times I$ является конкордантностью. Произведем объемлемую изотопию цилиндра $S^{p-1} \times I$, превращающую конкордантность i в изотопию. Так как любая изотопия является объемлемой, то существует гомеоморфизм $h : S^{p-1} \times I \to S^{p-1} \times I$, выпрямляющий множество $(S(f) \cap (S^{p-1} \times I))$, то есть такой, что $h(S(f) \cap (S^{p-1} \times I)) = h(S(f) \cap (S^{p-1} \times 0)) \times I$. Искомый гомеоморфизм $f(S^{p-1} \times I) \cong f(S^{p-1} \times 0) \times I$ является фактором гомеоморфизма h. (Аналогично доказательству 2.6 можно проверить, что при подходящем выборе гомеоморфизма из Утверждения 2.6 этот фактор определен корректно). $\square$

Утверждение 2.8. *Существует гомеоморфизм $S^{m-1}\times I$, выпрямляющий множество $f(S^{p-1}\times I)$.*

Доказательство. Согласно Утверждению 2.7 включение $i : f(S^{p-1}\times I) \hookrightarrow S^{m-1}\times I$ — конкордантность. Рассуждая, как в доказательстве Утверждения 2.7, мы получаем искомый гомеоморфизм. $\square$

Произведем гомеоморфизм $S^m \to S^m$, продолжающий гомеоморфизм из Утверждения 2.8. Полученное в результате сингулярное зацепление стандартизовано, тем самым при $p \le q$ Лемма 2.2 доказана. $\square$

Доказательство Леммы 2.2 при $p = q+1$. Доказательство аналогично доказательству в случае $p \le q$, с той разницей, что конусы $B_\pm$ и $C_\pm$ заменяются коллапсируемыми подполиэдрами, предоставляемыми следующим утверждением (сравни с доказательствами теорем вложения в книге [9]). $\square$

Утверждение 2.9. *Существуют коллапсируемые подполиэдры $B_\pm \subset S^p$ и $C_\pm \subset S^m$, удовлетворяющие Утверждениям 2.4 и 2.5.*

Доказательство. (трюк Ирвина) Пусть $\bar B_\pm$ — полиэдры, предоставляемые Утверждением 2.3. Определим подполиэдры $\bar C_\pm$ аналогично. Эти подполиэдры удовлетворяют всем необходимым свойствам, кроме $\bar C_\pm \cap fS^p = f\bar B_\pm$. В силу неравенства $\dim(\bar C_\pm - f\bar B_\pm)\cap fS^p \le (p-[\frac{m+1}{2}]+2)+p-m \le 0$ множество $(\bar C_\pm - f\bar B_\pm)\cap fS^p$ (если непусто) состоит из конечного числа точек, не принадлежащих $S(f)$. Соединим каждую из этих точек с полиэдром $\bar B_\pm$ путем общего положения в сфере S^p. Пусть $B_\pm$ — объединение этих путей и конуса $\bar B_\pm$. Аналогично, добавляя конусы над полиэдрами $f(B_\pm - \bar B_\pm)$ к полиэдру $\bar C_\pm$, мы получим коллапсируемый полиэдр $C_\pm \subset S^m$, для которого $\dim(C_\pm - \bar C_\pm) \le 2$. Полиэдры $B_\pm$ и $C_\pm$ — искомые. $\square$

Инъективность в Теореме 1.4 доказывается с помощью относительной версии предыдущего рассуждения. *Стандартизованное* сингулярное зацепление $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$ определяется так же, как в 2.1, с той разницей, что мы фиксируем стандартное разбиение *диска* $D^k = D^k_+ \cup (D^{k-1}\times I)\cup D^k_-$ вместо *сферы*. Обозначим через $D^{k-1}_\pm = D^k_\pm \cap \partial D^k$. Будем считать, что ∂D^{k-1}_+ — экватор сферы ∂D^k.

Лемма 2.10. *Предположим, что $p \le q+1$, $p \le m-3$ и $2p+2q \le 3m-5$; тогда любое сингулярное зацепление общего положения $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$, ограничение которого на край является надстройкой, сингулярно гомотопно относительно края стандартизованному сингулярному зацеплению.*

Доказательство инъективности в 1.4 по модулю 2.10 при $p \le q$. Нам достаточно доказать, что если надстройка сингулярного зацепления $f_0 : S^p \sqcup S^q \to S^m$ нуль-гомотопна, то и само сингулярное зацепление f_0 нуль-гомотопно. Рассмотрим нуль-гомотопию $f : D^{p+2} \sqcup D^{q+1} \to D^{m+2}$ сингулярного зацепления Σf_0. По Лемме 2.10 можно считать, что сингулярное зацепление f стандартизовано.

Сдвинем образ fD^{q+1} вдоль образующих цилиндра $D^{m+1}\times I$ по направлению к ∂D^{m+2}_+, пока оно не попадет в основание $\partial D^{m+2}_+ - \partial D^{m+2}$. Ограничение полученного сингулярного зацепления на $(\partial D^{p+2}_+ - \partial D^{p+2}) \sqcup D^{q+1}$ является искомой нуль-гомотопией сингулярного зацепления f_0. $\square$

Доказательство Леммы 2.10. Доказательство аналогично доказательству Леммы 2.2 со следующими изменениями. Пусть $\hat D^k$ — шар, полученный из шара D^k приклеиванием двух конусов $CD^{k-1}_\pm$ вдоль $D^{k-1}_\pm$. Пусть $\hat f : \hat D^p \sqcup \hat D^q \to \hat D^m$ — очевидное продолжение сингулярного зацепления $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$. Ясно, что достаточно сделать сингулярное зацепление $\hat f$ стандартизованным (с помощью гомеоморфизмов дисков $\hat D^p$ и $\hat D^m$, неподвижных на границе).

(1) *Построение гомеоморфизма $\hat D^p \to \hat D^p$ при $p \le q$.* Пусть A_+ — объединение экватора ∂D^{p-1}_+ и всех симплексов комплекса $S(f)$ размерности не больше $\frac{1}{2}\dim S(f)$.

Утверждение 2.11. *Существуют подполиэдры $B_\pm \subset D^p$, коллапсируемые на $B_\pm \cap D^{p-1}_\pm$ и удовлетворяющее Утверждению 2.4.*

Доказательство. Возьмем гомотопию общего положения $i_t : A_\pm \to D^p$, неподвижную на множестве $A_\pm \cap D^{p-1}_\pm$, такую что $i_0 : A_\pm \hookrightarrow D^p$ — включение и $i_1 A_\pm \subset D^{p-1}_\pm$. Пусть $B_\pm$ — след гомотопии i_t. $\square$

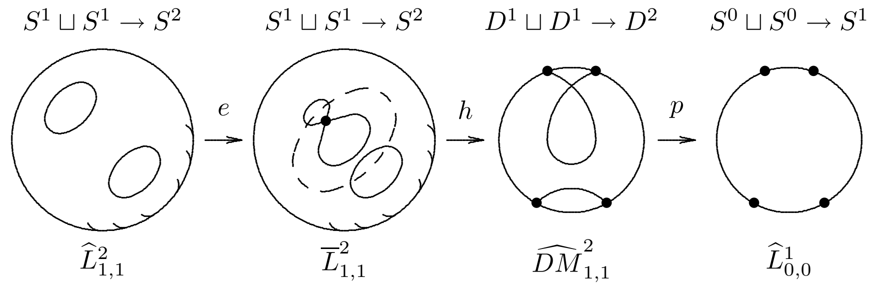

Рис. 3. Геометрическая EHP последовательность для зацеплений

Возьмем подходящие регулярные окрестности полиэдров $B_\pm \cup C(B_\pm \cap D^{p-1}_\pm)$ в многообразии $D^p \cup CD^{p-1}_\pm$. Произведем гомеоморфизм $\hat{D}^p \to \hat{D}^p$, неподвижный на границе, переводящий эти окрестности в шары стандартного разбиения диска $\hat{D}^p$.

Шаги (2) и (3) из доказательства Леммы 2.2 видоизменяются аналогичным образом. $\square$

Таким образом, мы доказали Теорему 1.4 при $p \le q$.

Доказательство Теоремы 1.4 при $p > q$. Отображение Σ сюръективно как композиция

$$LM^m_{p,q} \xrightarrow{\Sigma^{p-q}} LM^{m+p-q}_{p,p} \xrightarrow{\Sigma} LM^{m+p-q+1}_{p+1,p} \xrightarrow{(\Sigma^{p-q})^{-1}} LM^{m+1}_{p+1,q},$$

в которой все отображения корректно определены и сюръективны в силу случая $p \le q$ Теоремы 1.4. Инъективность отображения Σ доказывается аналогично. $\square$

3. Классификация зацеплений

Мы доказываем Теорему 1.1 следующим образом. Сначала мы доказываем теорему о надстройке для зацеплений (Теорема 3.1), сводящую классификацию зацеплений к классификации *дисковых сингулярных зацеплений*. Потом мы упрощаем группу дисковых сингулярных зацеплений, и находим ее, пользуясь классификацией (сферических) сингулярных зацеплений. Формально, 1.1 следует из 1.4, 3.2, 3.3, 3.5 и 5-леммы.

Введем некоторые обозначения. Всюду в §3 мы работаем в гладкой категории.

Обозначим через $\widehat{L}^m_{p,q}$ группу классов конкордантности вложений $S^p \sqcup S^q \to S^m$, ограничения которых на S^p и S^q незаузлены.

Назовем *почти зацеплением* сингулярное зацепление $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$, ограничение которого на S^q является незаузленным вложением. Назовем *почти конкордантностью* сингулярную конкордантность $(S^p \sqcup S^q) \times I \to S^m \times I$, ограничение которой на $S^q \times I$ является конкордантностью. Пусть $\overline{L}^m_{p,q}$ — множество почти зацеплений с точностью до почти конкордантности. При $p, q \le m-3$ это множество — коммутативная группа относительно операции 'покомпонентной связной суммы'. Нетрудно видеть, что эта группа изоморфна гомотопической группе $\pi_p(S^{m-q-1})$ (сравни с определением отображения λ ниже в этом пункте).

Дисковым сингулярным зацеплением мы называем собственное сингулярное зацепление $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$, ограничение которого на $(\partial D^p) \sqcup D^q$ является вложением, причем вложение $f : \partial D^p \to \partial D^m$ незаузлено. *Дисковой сингулярной конкордантностью* мы называем собственную сингулярную конкордантность $(D^p \sqcup D^q) \times I \to D^m \times I$, ограничение которой на $(\partial D^p \sqcup D^q) \times I$ является конкордантностью. Пусть $\widehat{DM}^m_{p,q}$ — множество дисковых сингулярных зацеплений с точностью до дисковой сингулярной гомотопии. При $p, q \le m-3$ это множество обладает естественной структурой коммутативной группы.

Теорема 3.1 (Геометрическая EHP последовательность для зацеплений)**.** (А. Скопенков, сравни с [19], см. иллюстрацию 3) *При $p, q \le m-3$ имеется точная последовательность*:

$$\ldots \longrightarrow \widehat{L}^m_{p,q} \xrightarrow{e} \overline{L}^m_{p,q} \xrightarrow{h} \widehat{DM}^m_{p,q} \xrightarrow{p} \widehat{L}^{m-1}_{p-1,q-1} \longrightarrow \ldots$$

Доказательство. Построение гомоморфизмов. Пусть e — очевидное отображение. Пусть p — отображение 'ограничения на край'. Отображение h является 'гомоморфизмом вырезания', определяемым следующим образом. Возьмем почти зацепление общего положения $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$. Возьмем пару точек общего положения $x \in fS^p$ и $y \in fS^q$, и соединим их путем l, пересекающим

$f(S^p \sqcup S^q)$ только по ∂l. Пусть $\bar{D}^m$ — дополнение к небольшой окрестности пути l в сфере S^m. Обозначим $\bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q = f^{-1}\bar{D}^m$. Положим $h(f)$ равным ограничению отображения f до отображения $\bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q \to \bar{D}^m$.

Доказательство точности. Мы имеем $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} e$, поскольку зацепление $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ продолжается до дискового сингулярного зацепления $D^{p+1} \sqcup D^{q+1} \to D^{m+1}$, если и только если оно почти конкордантно тривиальному зацеплению. Мы имеем $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} p$, поскольку дисковое сингулярное зацепление $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$ продолжается без добавления новых самопересечений до почти зацепления $S^p \sqcup S^q \to S^m$, если и только если ограничение f на край нуль-конкордантно.

Чтобы доказать $\operatorname{Im} e \subset \operatorname{Ker} h$, возьмем собственное вложение $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$. Возьмем пару точек $x \in D^p$ и $y \in D^q$. Соединим fx и fy путем l, пересекающей $f(D^p \sqcup D^q)$ только по ∂l. Пусть $\bar{D}^m$ — небольшая окрестность пути l в сфере S^m. Обозначим $\bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q = f^{-1}\bar{D}^m$. Ограничение $f : (D^p - \bar{D}^p), \sqcup (D^q - \bar{D}^q) \to (D^m - \bar{D}^m)$ — конкордантность. Согласно теореме 'конкордантность влечет изотопию' можно считать, что это ограничение сохраняет уровни. Тогда трюк Александера показывает, что вложение $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$ объемлемо изотопно ограничению $f : \bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q \to \bar{D}^m$. Последнее ограничение тривиально, поэтому $h \circ e = 0$.

Чтобы доказать $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Im} e$, возьмем произвольное почти вложение $f \in \overline{L}^m_{p,q}$ такое, что $h(f) = 0$. По определению, существует дисковая сингулярная конкордантность c между $h(f)$ и некоторым вложением. Можно считать, что ограничение c на край является изотопией. По теореме о продолжении изотопии [9] эта изотопия продолжается до объемлемой изотопии диска $S^m - \bar{D}^m$ (из определения отображения h выше). Таким образом, дисковая сингулярная конкордантность c может быть продолжена до почти конкордантности между f и некоторым зацеплением $f' \in \widehat{L}^m_{p,q}$. Следовательно, $f = e(f')$. $\square$

Следствие 3.2. $L^m_{p,q} \cong C^{m-p}_p \oplus C^{m-q}_q \oplus \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \widehat{DM}^{m+1}_{p+1,q+1}$ *при* $p \le q \le m-3$.

Доказательство. Согласно [8, Th. 2.4] мы имеем $L^m_{p,q} \cong \widehat{L}^m_{p,q} \oplus C^{m-p}_p \oplus C^{m-q}_q$. Таким образом, достаточно показать, что при $p \le q$ гомоморфизм $e : \widehat{L}^m_{p,q} \to \overline{L}^m_{p,q}$ имеет правый обратный. Искомый правый обратный $\pi_p(S^{m-q-1}) \to \widehat{L}^m_{p,q}$ построен в статье [8, Th. 10.1]: он отображает гомотопический класс отображения $\phi : S^p \to S^{m-q-1}$ в зацепление $f : S^p \sqcup S^q \to D^{q+1} \times S^{m-q-1} \subset S^m$, заданное формулой $f(x \sqcup y) = (\frac{1}{2}x; \phi x) \sqcup (y; c)$, где точка $c \in S^{m-q-1}$ фиксирована. $\square$

Упростим группу $\widehat{DM}^m_{p,q}$. Пусть $\overline{DM}^m_{p,q}$ — группа собственных сингулярных зацеплений $f : D^p \sqcup D^q \to D^m$, ограничение которых $f : \partial D^p \to \partial D^m$ является незаузленным вложением (с точностью до сингулярной конкордантности, ограничение которой на $\partial D^p \times I$ — конкордантность).

Лемма 3.3. *Если* $p, q \le m-3$, *то естественное отображение* $\widehat{DM}^m_{p,q} \to \overline{DM}^m_{p,q}$ *биективно при* $2p + 2q \le 3m - 5$ *и сюръективно при* $2p + 2q \le 3m - 4$.

Доказательство. Сюръективность. Возьмем сингулярное зацепление общего положения $f \in \overline{DM}^m_{p,q}$. Пара $(D^m - fD^p, \partial D^m - f\partial D^p)$ является $(2m-2p-3)$-связной, поскольку $H_i(D^m - fD^p, \partial D^m - f\partial D^p) \cong H^{m-i-1}(fD^p) = 0$ при $i \le 2m - 2p - 3$ (потому что пространство fD^p гомотопически эквивалентно конусу отображения $f : S(f) \to fS(f)$, имеющему размерность не более $2p - m + 1$, сравни с [6, Lemma 4.2]). Таким образом, в силу предположений $q \le m-3$, $2p + 2q \le 3m - 4$ и теоремы вложения из [9] ограничение $f|_{D^q} : (D^q, \partial D^q) \to (D^m - fD^p, \partial D^m - f\partial D^p)$ гомотопно вложению. Значит, f принадлежит образу естественного отображения $\widehat{DM}^m_{p,q} \to \overline{DM}^m_{p,q}$.

Инъективность. Возьмем сингулярную конкордантность общего положения $f : (D^p \sqcup D^q) \times I \to D^m \times I$, ограничение которой на $D^q \times \partial I \cup \partial D^p \times I$ является вложением. Достаточно устранить самопересечения цилиндра $D^q \times I$ с помощью сингулярной гомотопии, неподвижной на $(D^p \sqcup D^q) \times \partial I$. Это возможно в силу следующей теоремы, доказываемой аналогично теореме вложения из статьи [9], так как пара $(D^m \times I - f(D^p \times I), \partial D^m \times I - f(\partial D^p \times I))$ является $(2m-2p-3)$-связной. $\square$

Теорема 3.4 (Теорема вложения)**.** *Пусть* M^{m+1}, $Y^m \subset \partial M$ *и* $X^q \subset \partial D^{q+1}$ *— компактные многообразия. Пусть* $f : (D^{q+1}, X) \to (M, Y)$ *— собственное отображение, такое что* $f|_{\partial D^{q+1} - X}$ *— вложение. Если* $q \le m - 3$ *и пара* $(M; Y)$ *—* $(2q - m + 2)$*-связна, то* f *собственно гомотопно* $\operatorname{rel} \partial D^{q+1} - X$ *вложению.*

Найдем группу $\overline{DM}^m_{p,q}$. Обозначим $n = p + q + 1 - m$. Мы собираемся определить гомоморфизм $\beta : \overline{DM}^m_{p,q} \to \pi_n(V_{M+m-p-1,M})$. Следующая теорема вместе с 5-леммой влечет биективность этого гомоморфизма.

Теорема 3.5. (А. Скопенков, сравни с [13, Th. 3.1], [11, Лемма 5.1], [12, Th. 4.8]) *При* $p, q \le m-3$ *и* $3p+q \le 3m-5$ *имеется следующая диаграмма с точными строками, коммутативная с точностью до знака*:

$$\begin{tikzcd}
\overline{L}^m_{q,p} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\lambda"] & LM^m_{p,q} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha"] & \overline{DM}^m_{p,q} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & \overline{L}^{m-1}_{q-1,p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & \cdots \\
\pi_q(S^{m-p-1}) \arrow[r, "E"] & \pi^S_n \arrow[r, "H"] & \pi_n(V_{M+m-p-1,M-}) \arrow[r, "P"] & \pi_{q-1}(S^{m-p-1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Верхняя строка строится аналогично Теореме 3.1 (с аналогичным доказательством точности). Нижняя строка — стабильная EHP последовательность Джеймса, для которой мы используем следующее геометрическое построение [15, §1 и §4], сравни с [10, 25, 4].

Построение EHP последовательности. Отождествим группы $\pi_q(S^{m-p-1})$ и π^S_n с группами оснащенных вложений и погружений, соответственно, замкнутых n-мерных многообразий в сферу S^q (с точностью до оснащенного кобордизма). *Собственным погружением* будем называть собственное оснащенное погружение n-мерного многообразия в диск D^q, ограничение которого на край является вложением. *Собственным кобордизмом* будем называть собственное оснащенное погружение $c : N^{n+1} \to D^q \times I$, ограничение которого на $c^{-1}(S^{q-1} \times I)$ является вложением. Согласно [15, Prop. 4.1] мы можем отождествить $\pi_n(V_{M+m-p-1,M})$ с группой собственных погружений с точностью до собственного кобордизма.

Пусть $E : \pi_q(S^{m-p-1}) \to \pi^S_n$ — очевидное отображение. Далее, пусть $P : \pi_n(V_{M+m-p-1,M}) \to \pi_q(S^{m-p-1})$ — отображение "ограничения на край". Пусть $H : \pi^S_n \to \pi_n(V_{M+m-p-1,M})$ гомоморфизм "вырезания", определяемый вырезанием небольшого диска из погруженного n-мерного многообразия и его прообраза из сферы S^q.

Построение вертикальных гомоморфизмов. Удалим одну точку из сферы S^m и отождествим результат с $\mathbb{R}^m$. Для сингулярного зацепления $f : X \sqcup Y \to \mathbb{R}^m$ определим отображение $\tilde{f} : X \times Y \to S^{m-1}$ формулой $\tilde{f}(x,y) = \frac{fx-fy}{|fx-fy|}$. Обозначим через $\mathrm{pr} : X \times Y \to Y$ очевидную проекцию.

Определение отображения α. (сравни с [12]) Пусть $f : S^p \sqcup S^q \to \mathbb{R}^m$ — сингулярное зацепление общего положения. Возьмем регулярное значение $v \in S^{m-1}$ отображения $\tilde{f}$. Пусть $\alpha(f)$ — класс кобордизма оснащенного погружения $\mathrm{pr} : \tilde{f}^{-1}v \to S^q$. (Ясно, что α коммутирует с Σ, поэтому в силу 1.4 и [12, Th. 2.13] α — изоморфизм при $p, q \le m-3$ и $2p+2q \le 3m-5$).

Определение отображения λ. (сравни с [8]) Возьмем сингулярное зацепление общего положения $f \in \bar{L}^m_{q,p}$. Дополнение $S^m - fS^p$ ретрагируется на сферу S^{m-p-1}, ограничивающую диск, нормальный к образу fS^p. Можно считать, что сфера S^{m-p-1} является стандартной (независимость от выбора изотопии, переводящей сферу S^{m-p-1} в стандартную, проверяется аналогично [8, Th. 7.1]). Поместим образ fS^q в сферу S^{m-p-1} с помощью подходящей сингулярной гомотопии $\mathrm{rel}\, S^p$. Возьмем регулярное значение $v \in S^{m-p-1}$ отображения $\tilde{f}$. Пусть $\lambda(f)$ — класс кобордизма оснащенного вложения $\mathrm{pr} : \tilde{f}^{-1}v \to S^q$.

Определение отображения β. (сравни с [13]) Возьмем дисковое сингулярное зацепление общего положения $f : D^p \sqcup D^q \to \mathbb{R}^m_+$, где $\mathbb{R}^m_+$ — верхнее полупространство. С помощью собственной сингулярной гомотопии, ограничение которой на ∂D^p является изотопией, можно поместить образ $f\partial D^q$ в стандартную сферу S^{m-p-1}. Возьмем регулярное значение $v \in S^{m-p-1}$ отображения $\tilde{f}$. Пусть $\beta(f)$ — класс собственного кобордизма собственного оснащенного погружения $\mathrm{pr} : \tilde{f}^{-1}v \to D^q$.

Таким образом, требуемая диаграмма построена. Коммутативность с точностью до знака проверяется непосредственно. □

Замечание 3.6. Ограничение $2p+2q \le 3m-6$ в Теореме 1.1 — наилучшее, формула перестает быть верной при $2p+2q = 3m-5$. Например, возьмем $m = p+4 = 4k-1$, $k \ge 5$, $q = 2k+1$. Тогда группа $LM^{m+1}_{p+1,q+1}$ бесконечна [13, p. 755-756]. Таким образом, в силу 3.3 и 3.5 $\mathrm{rk}\, \widehat{DM}^{m+1}_{p+1,q+1} \ge \mathrm{rk}\, \overline{DM}^{m+1}_{p+1,q+1} > \mathrm{rk}\, \pi_{p+q+2-m}(V_{M+m-p-1,M})$. Поэтому, согласно 3.2 ранг левой части в формуле 1.1 больше, чем ранг правой части.

Замечание 3.7. Рассуждение статьи [8] можно обобщить, чтобы доказать Теорему 1.1 по крайней мере для всех размерностей, удовлетворяющих неравенству $2p_1 + 2p_2 \le 3m-7$ (здесь мы пользуемся обозначениями статьи [8]). Действительно, единственный шаг указанного доказательства, для которого это ограничение не является достаточным, — это утверждение [8, Proposition 10.2]. Данное утверждение следует из того, что группа $\Lambda^{(q)}_{p_1}$ (соответственно, $\Pi^{(q)}_{m-2}$) порождается всеми элементами $\theta_k(i_1, i_2)$ (соответственно, $[[i_2, i_1], i_2]$ и $\theta_{k+1}(i_1, i_2)$), для которых $kp_1 + p_2 \ge (k+1)(m-2)$.

Возможная причина, почему это усиление не было замечено в статье [8], состоит в том, что ограничение $2p_1 + 2p_2 \le 3m - 7$ не возникало естественным образом в разрабатываемой там теории вложений в отличие от ограничения $3p_1 + p_2 \le 3m - 7$.

Благодарности. Автор благодарен А. Скопенкову за постоянное внимание к данной работе и рецензенту журнала 'Proceedings of the American Mathematical Society' за полезные предложения.

Список литературы

1. A. Bartels, P. Teichner, *All two dimensional links are null homotopic*, Geom. Topol. **3** (1999), p. 235–252.
2. M. Cencelj, D. Repovs, M. Skopenkov, *Homotopy type of the complement to an immersion and classification of embeddings of tori*, Rus. Math. Surv. **62:5** (2007), p. 985–987, arXiv:0803.4285v1[math.GT].
3. M. Cencelj, D. Repovs, M. Skopenkov, *Knotted tori and the beta-invariant*, preprint.
4. P. Eccles, *Multiple points of codimension one immersions*, Lect. Notes Math. **788** (1980), p. 23–38.
5. N. Habegger, *Knots and links in codimension greater than 2*, Topol. **25:3** (1986), p. 253–260.
6. N. Habegger, U. Kaiser, *Link homotopy in the 2-metastable range*, Topol. **37:1** (1998), p. 75–94.
7. A. Haefliger, *Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q > 2$*, Ann. Math., Ser.3 **83** (1966) p. 402–436.
8. ———, *Enlacements de spheres en codimension superiure a 2*, Comm. Math. Helv. **41** (1966-67), p. 51–72 (in French).
9. J. F. P. Hudson, *Piecewise-linear topology*, Benjamin, New York-Amsterdam 1969.
10. I. M. James, *On the iterated suspension*, Quart. J. Math. Oxford **5** (1954), p. 1–10.
11. M. Kervaire, *An interpretation of G. Whitehead's generalization of H. Hopf's invariant*, Ann. Math. **69** (1959), p. 345–362.
12. U. Koschorke, *Link maps and the geometry of their invariants*, Manuscripta Math. **61:4** (1988), p. 383–415.
13. ———, *On link maps and their homotopy classification*, Math. Ann. **286:4** (1990), p. 753–782.
14. ———, *A generalization of Milnor's μ-invariants to higher dimensional link maps*, Topology **36:2** (1997), p. 301–324.
15. U. Koschorke, B. Sanderson, *Geometric interpretation of the generalized Hopf invariant*, Math. Scand. **41** (1977), p. 199–217.
16. V. Krushkal, P. Teichner, *Alexander duality, gropes and link homotopy,* Geom. Topol. **1** (1997), p. 51–69.
17. S. Melikhov, *Link concordance implies link homotopy in codimension ≥ 3*, Uspekhi Mat. Nauk **55:3** (2000), p. 183–184 (in Russian).
18. ———, *Link concordance implies link homotopy in codimension ≥ 3*, preprint.
19. V. Nezhinsky, *A suspension sequence in link theory*, Izv. Akad. Nauk **48:1** (1984), p. 126–143 (in Russian).
20. G.F. Paechter, *The groups $\pi_r(V_{n,m})$*, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, **7** (1956), p. 249–268.
21. D. Repovs and A. Skopenkov, *New results on embeddings of polyhedra and manifolds into Euclidean spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **54:6** (1999), p. 61–109 (in Russian).
22. G. P. Scott, *Homotopy links*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **32** (1968), p. 186–190.
23. A. Skopenkov, *Classification of embeddings below the metastable dimension*, submitted, arXiv:math/0607422[math.GT].
24. ———, *Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces*, *in*: *Surveys in Contemporary Mathematics, Ed. N. Young and Y. Choi*, London Math. Soc. Lect. Notes **347** (2007), p. 248–342, arXiv:math/0604045[math.GT].
25. A. Szücs, *Cobordism group of l-immersions*, Acta Math. Hungar. **28** (1976), p. 93-102 (in Russian).

Кафедра Дифференциальной геометрии и приложений, Механико-математический факультет, Московский Государственный Университет, 119992, Москва, Россия.

E-mail address: skopenkov@rambler.ru