四次循环数域的相对整基

冯克勤　张贤科
(中国科学技术大学,合肥)

设 E 为数域 F 的 n 次扩域,所谓 E 相对于 F 的整基,或者称作是 E/F 的相对整基,即是指 O_F-模 O_E 的 O_F-基(其中 O_E 和 O_F 分别表示数域 E 和 F 的整数环),亦即是 O_E 中的一组元素 $\{b_1, \cdots, b_n\}$,使得 $O_E = \bigoplus_{i=1}^{n} b_i O_F$. 当 F 的理想类数是 1,即 O_F 为主理想环时(例如 $F = \mathbf{Q}$),O_E 为自由 O_F-模,从而 E/F 总有相对整基. 但在一般情形下,E/F 不一定有相对整基.

本文的目的是研究(有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的)四次循环域 K 对于它的实二次子域 $k = \mathbf{Q}(\sqrt{u})$ (u 无平方因子)的相对整基存在性问题. 目前有如下两个结果.

1. Narkiewicz[1] 于 1974 年证明了: 当 u 为素数时,K/k 必有相对整基.

2. Edgar 和 Peterson[2]于 1980 年证明了: 当 u 不是素数时,总存在着一个四次循环域 K,其二次子域为 $k = \mathbf{Q}(\sqrt{u})$ 而 K/k 不具有相对整基.

本文中我们彻底解决了 K/k 的相对整基问题,这项工作分两部分. 冯克勤*从 Galois 群出发,按照 Hasse 的风格对于四次循环域给出明显地刻划和分类. 下面是其中一部分结果:

(1) 每个($\mathbf{Q}$ 上的)四次循环域 K 都可以写成如下形式: $K = \mathbf{Q}\left(\sqrt{wv(cu + a\sqrt{u})}\right)$,其中 $c^2u = a^2 + b^2$, $a \equiv 1 \pmod 4$, $(a, b) = 1$, $(u, v) = 1$, $w|u$, u 和 v 无平方因子. 它的二次实子域为 $k = \mathbf{Q}(\sqrt{u})$. K/k 的判别式为 $d = 2^\delta v_1\sqrt{u}$,其中 v_1 表示 v 和 $v/2$ 中为奇数的那一个,δ 可以等于 0, 2 和 3. 我们称这种形式的域 K 为 (u, v) 型的.

(2) 对每个固定的 (u, v) 共有 2^{g-1} 个 (u, v) 型四次循环域 K(g 为 u 的不同素因子个数).

张贤科**解决了 K/k 之相对整基问题.并给出相对整基存在的充分必要条件和以下结论:

(3) K/k 有相对整基时,必然 $N_{k/\mathbf{Q}}(\varepsilon_0) = -1$,其中 ε_0 是 $k = \mathbf{Q}(\sqrt{u})$ 的基本单位.

(4) 当 $N_{k/\mathbf{Q}}(\varepsilon_0) = -1$ 时,在以 k 为二次子域的 2^{g-1} 个 (u, v) 型四次循环域中,恰好有一个对于 k 有相对整基,并且它就是 $K = \mathbf{Q}\left(\sqrt{2^u v(tu + 2\sqrt{u})}\right)$,而且 $\left\{1, \frac{2^\delta + \sqrt{d\varepsilon_0^3}}{2}\right\}$ 是 K/k 的一组相对整基($\varepsilon_0 = (s + tu^{1/2})/2$).

容易看出文献[1]和[2]中结果均是这里结果的特殊情形: 当 u 为素数时,熟知有 $N_{k/\mathbf{Q}}(\varepsilon_0) = -1$,由(2)可知,只有唯一的 (u, v) 型四次循环域 K,再由(4)可知 K/k 有相对整基,这就是结果 1. 另一方面,当 u 不为素数时,$g \geq 2$,从而由 2 可知有 ≥ 2 个 (u, v) 型四次循环域 K,而由 4 知其中至多有一个 K 使 K/k 有相对整基. 从而得到结果 2.

参 考 文 献

[1] Narkiewicz, W., *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1974.

[2] Edgar, H. & Peterson, B., *Journal of Number Theory*, 12(1980), 77—83.

本文 1981 年 11 月 24 日收到.

* 冯克勤,四次循环域的明显刻划,待发表.　** 张贤科,四次循环域的相对整基,待发表.