递归可枚举的脱殊的 Turing 度的构造*

丁 德 成

(南京大学数学系，南京 210008)

关键词 递归可枚举的脱殊集和脱殊度、wtt-有顶的、wtt-有底的

Jockusch[1] 和 Ingrassia1) 分别在 1985 年和 1980 年提出了 e-脱殊性，s-脱殊性和 p-脱殊性等递归可枚举的脱殊性的概念．并证明了递归可枚举的脱殊性有许多重要性质．我们曾分析了 p-脱殊的 r. e. 的 Turing 度内的 wtt-度的构造，证明了 p-脱殊的 r. e. 度是非无邻的．本文将继续这方面的工作，研究 r. e. 的脱殊度的有顶性和有底性．

定义 1 一个 r. e 的 Turing 度是 wtt-有顶的 (wtt-topped) 是指存在一个 r. e. 集 A 使得 $A\in \mathbf{a}\&(\forall B\in \mathbf{a})[B$ 是 r. e. 的$\Rightarrow B\leqslant_{wtt}A]$.

定义 2 一个 r. e. 的 Turing 度是 wtt-有底的 (wtt-bottomed) 是指存在一个 r. e. 集 A 使得 $A\in \mathbf{a}\&(\forall B\in \mathbf{a})[B$ 是 r. e. 的$\Rightarrow A\leqslant_{wtt}B]$.

关于 $e(s,p)$-脱殊集和脱殊度[1,1)]之间有如下的关系：

$$e\text{-脱殊性}\Rightarrow s\text{-脱殊性}\Rightarrow p\text{-脱殊性},$$

并且任何 e-脱殊度或 s-脱殊度是低的．

本文要采用下面的记号．设 $e=\langle e_0,e_1\rangle$,

(i) $[e](x)=\{e_1\}(x)$, $[e](x)[s]=\{e_1\}(x)[s]$,

(ii) $[e](A;x)=\begin{cases}\{e_0\}(A;x), & \text{如 } \{e_0\}(A;x)\downarrow\&u(A;e_0,x)\leqslant[e](x)\downarrow;\\ \uparrow, & \text{否则}.\end{cases}$

所以，$B\leqslant_{wtt}A\Longleftrightarrow(\exists e)[B=[e](A)]$．其它没有给出的符号和定义可参见文献[2].

引理 1[3] r. e. 集 A 是低的充分必要条件是存在一个递归函数 f 使得对所有 j;

(1) $W_j\cap\{x:D_x\subseteq\bar{A}\}=W_{f(j)}\cap\{x:D_x\subseteq\bar{A}\}$,

(2) $W_j\cap\{x:D_x\subseteq\bar{A}\}$ 是有穷的$\Rightarrow W_{f(j)}$ 是有穷的.

定理 1 设 A 是低的 r. e. 的 p-脱殊集，则 $\deg_T(A)$ 不是 wtt-有顶的.

证 设 $\{A[s]\}$ 是 A 的一个递归枚举．因为 A 是给定的集合，因此要证明 $\deg_T(A)$ 不是 wtt-有顶的，只要证明：任给 i,j，若有 $W_i=\{j\}(A)$，则对所有 k，下面的需求满足：

$$R_k:\ B_{\langle i,j\rangle}\neq[k](W_i)\&B_{\langle i,j\rangle}\leqslant_T A.$$

定义 (1) γ 是集合 A 的一个标准标志系统，其定义如下:

$$\begin{cases}\gamma(x)[0]=\langle x,0\rangle, \text{ 对所有 } x,\\ \gamma(x)[s+1]=\begin{cases}\langle x,s\rangle, & \text{如 } A[s+1]\upharpoonright x\neq A(s)\upharpoonright x\\ \gamma(x)[s], & \text{否则}.\end{cases}\end{cases}$$

本文 1991 年 11 月 9 日收到．1992 年 2 月 15 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

1) Ingrassia, M., Ph. D. Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1981.

定义 (2)

$$V_j(x)[s]=\begin{cases}\mu z[z\geqslant u(A;j,\gamma(x)[s])[s], & \text{如 } u(A;j,\gamma(x)[s])[s]\downarrow;\\ \uparrow, & \text{否则.}\end{cases}$$

定义 (3) 设 $e=\langle i,j,k\rangle$, 则 $l(e)[s]$ 为

$$\max\{x:(\forall y<x)[B_{\langle i,j\rangle}(y)[s]=[k](W_i;y)[s]\&\{j\}(A)[s]\upharpoonright[k](y)=W_i[s]\upharpoonright[k](y)]\}.$$

为证明 R_k 是满足的，我们在构造 $B_{\langle i,j\rangle}$ 的同时构造一个公理列 L_k，并证明若 R_k 不满足,则A于 L_k 既无全局胜,又无局部胜,因而与A是 p-脱殊的假设矛盾.

为了应用 Robinson 技巧，设 f 是引理 1 中的那个递归函数 f，对角一个 k 要构造一个辅助的 r. e. 集 Q_k. 根据递归定理,设 g 是使得 $Q_k=W_{g(k)}$ 的递归函数.

定义 (4) R_k 在 $s+1$ 阶段是满足的是指存在在 $t+1\leqslant s$ 阶段指定的随员 x 使得

$$x\in B_{\langle i,j\rangle}[s]\&A[t]\upharpoonright u(A;j,[k](x))[t]=A[s]\upharpoonright u(A;j,[k](x))[t].$$

定义 (5) R_k 在 $s+1$ 阶段需要注意是指 R_k 在 $s+1$ 阶段不满足且下面两条中有一条成立:

(i) R_k 有一个在 $t+1\leqslant s$ 阶段指定的随员 x 使得 $V_j(x)[t]\in A[s]-A[s-1]$,

(ii) 条件 (i) 不成立,但存在 $x\in\omega^{(k)}-B_{\langle i,j\rangle}[s]$ 使得 x 是大于 R_k 已有的所有随员,且

$$l(e)[s]>x\&\gamma(x)[s]>[k](x).$$

$B^{(k)}_{\langle i,j\rangle}$, Q_k 和 L_k 的构造

阶段 0 对所有 i,j,k, $B^{(k)}_{\langle i,j\rangle}[0]=Q_k[0]=L_k[0]=\varnothing$, R_k 没有随员.

阶段 $s+1$ 第一步 如果 R_k 不需要注意,则直接进入第二步. 否则根据下面两种不同的情况采取相应的行动.

情况 1 条件 (i) 成立. 对任何在 $t+1\leqslant s$ 指定的随员 x, 若 x 没有被删去，且 $V_j(x)[t]\in A[s]$, 则放 x 于 $B_{\langle i,j\rangle}$, 并说 R_k 被 x 攻击了一次.

情况 2 条件 (ii) 成立,则选最小的适合条件 (ii) 的 x, 令

$$E=\{V_j(x)[s]\},\quad F=\bar{A}[s]\upharpoonright u(A;j,[k](x))[s],$$

再设 $F=D_z$(z 为F的正则编码),放 z 于Q_k,同时枚举 $W_{f(g(k))}$ 和A直到最小的使得

$$A[u]\cap F\neq\varnothing\vee z\in W_{f(g(K))}[u]$$

的阶段 u. 根据引理 1 的 (1), 这样的 u 一定存在. 若 $A[u]\cap F=\varnothing$, 则放$[E,F]$ 于 L_k 并指定 x 为 R_k 的随员,称 $[E,F]$ 为对应于 x 的公理,进入第二步. 若 $A[u]\cap F\neq\varnothing$, 直接进入第二步.

第二步 若 x 为 R_k 的随员,但 $A[s]\cap F\neq\varnothing$,则取消 x 的随员资格.

设 $B_{\langle i,j\rangle}=\bigcup_{k\in\omega}B^{(k)}_{\langle i,j\rangle}$.

引理 (1) $B_{\langle i,j\rangle}\leqslant_T A$.

证 显然.

引理 (2) 如果某个 L_k 中公理 $[E,F]$ 于A为假，则在所有充分大的阶段 R_k 是满足的,且事实上也是满足的.

证 设 $[E,F]\in L_k$ 于A为假，随员 x 对应于 $[E, F]$, 它在 $t+1$ 阶段被指定为随

员. 则 $E=\{V_j(x)[t]\}\subset A$, $F=\bar{A}[t]\upharpoonright u(A;j,[k](x))[t]\subset\bar{A}$, 且定义(5) (ii) 在 $t+1$ 阶段对 x 成立, $l(x)[t]>x$, 所以

$$\{j\}(A;x)[t]\upharpoonright[k](x)=W_i[t]\upharpoonright[k](x)\&B_{\langle i,j\rangle}[t]=[k](W_i;x)[t]=0.$$

因为 $F\subset\bar{A}$, 所以 $[k](W_i;x)=[k](W_i;x)[t]=0$, 且 x 的随员资格绝不会被取消. 根据 $E\subset A$, 存在 $s>t$ 使得 $V_j(x)[t]\in A[s]$, x 将在 $s+1$ 阶段被枚举入 $B_{\langle i,j\rangle}$, 从而在所有 $s'>s$ 阶段是满足的. 因为 $B_{\langle i,j\rangle}(x)=1\neq[k](W_i;x)$, R_k 事实上也是满足的.

引理(3) R_k 仅能指定有穷多个随员.

证 反设 R_k 指定了无穷多个随员, 并设 R_k 指定的第 n 个随员是在 t_n+1 阶段,其对应的公理为 $[E_n,F_n]$. 由引理(2), 不存在 n 使得 $[E_n, F_n]$ 于 A 为假, 故对所有 n, 有 $E_n\cap\bar{A}\neq\varnothing\vee F_n\cap A\neq\varnothing$. 由 A 的 p-脱殊性, 必存在一个有穷集 $G\subseteq\bar{A}$ 使得对所有 n, $G\cap E_n\neq\varnothing\vee A\cap F_n\neq\varnothing$. 然而由引理 1(2) 和 L_k 的构造,存在无穷多个 n 使得 $F_n\subseteq\bar{A}$. 对这无穷多个 n, 必有 $G\cap E_n\neq\varnothing$. 可是, 由于 $V_j(x_n)[t_n]\geqslant x_n$, 且 $m\neq n\Rightarrow x_m\neq x_n$, 这意味着 G 是无穷的,从而与假设矛盾. 所以 R_k 仅能指定有穷多个随员.

引理(4) R_k 事实上是满足的.

证 反设 R_k 事实上不满足,则 $B_{\langle i,j\rangle}=[k](W_i)$.由引理(3), 设 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 是 R_k 指定的有穷多个随员. $x_i(i\leqslant n)$ 对应于 $[E_i, F_i]$. 根据引理(2), 对任何 $i\leqslant n$, $E_i\cap\bar{A}\neq\varnothing\vee F_i\cap A\neq\varnothing$. 如果 s_i 是最小的使得 $F_i\cap A[s_i]\neq\varnothing$ 的阶段,则 x_i 的随员资格在 s_i+1 阶段被取消. 如 $F_i\subseteq\bar{A}$, 则必有 $E_i\not\subseteq A$, 即 x_i 绝无机会攻击 R_k, 所以 $x_i\notin B_{\langle i,j\rangle}$. 设 t_0 是这样的阶段, 使得对 R_k 的任何随员 x_i, 要么 x_i 的随员资格在 t_0 前被取消, 要么 $x_i\notin B_{\langle i,j\rangle}$, 即在所有 $t\geqslant t_0$ 阶段 R_k 不满足. 因为只有 R_k 的随员能进入 $B^{(k)}_{\langle i,j\rangle}$, 所以 $B_{\langle i,j\rangle}\cap\omega^{(k)}$ 是余无穷的. 此外,因为 $W_i=\{j\}(A)\&B_{\langle i,j\rangle}=[k](W_i)$, 所以 $\lim_s l(e)[s]=\infty$. 又因为 A 是非递归的而 γ 是 A 的一个标准标志系统, 由标准标志引理,存在无穷多个 $x\in\omega^{(k)}$ 使得 $\gamma(x)>[k](x)$. 设 $x>x_n$ 是最小的一个使得 $x\in\omega^{(k)}-B_{\langle i,j\rangle}\&\gamma(x)>[k](x)$ 的数, 而 $s>t_0$ 使得 $l(e)[s]>x\&\gamma(x)[s]>[k](x)\&A[s]\upharpoonright u(A;j,[k](x))=A\upharpoonright u(A;j,[k](x))$, 则 x 将在 $s+1$ 阶段被指定为 R_k 的随员,这与 t_0 的选择矛盾.

推论 如果 A 是 e-脱殊集或 s-脱殊集,则 $\deg_T(A)$ 是非 wtt-有顶的.

证 因为任何 $e(s)$-脱殊集是低 r. e. 的 p-脱殊集.

我们还与 Blaylock 各自独立地证明了下面的定理(私人通信,证明略).

定理 2 如果 A 是 e-脱殊集,则 $\deg_T(A)$ 不是 wtt-有底的.

参 考 文 献

[1] Jockusch, C. G., Recursion theory week, *Lecture Notes in Math.* 1141, Springer-Verlag, 1985, 203—232.

[2] Soare, R. I., *Recursively Enumerable Sets and Degrees*. Springer-Verlag, 1987.

[3] Fejer, P. A., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273** (1982), 157—180.