第17卷第6期　　工　程　力　学　　Vol.17 No.6
2000年12月　　ENGINEERING MECHANICS　　Dec. 2000

文章编号：1000-4750(2000)06-059-06

DQ法用于具有弹性支承半圆形输液曲管的稳定性分析

倪　樵[1]，张惠兰[2]，黄玉盈[1]，陈贻平[1]

(1.华中理工大学力学系，武汉 430074；2.中南财经大学，武汉 430070)

摘　要：将微分求积方法推广到输液曲管的稳定性分析，这是一个新的尝试。与其它数值方法相比，该法极易处理具有弹性边界的输液曲管，另外，由于避免了一系列数值积分的计算，故计算量较少，精度令人满意。在此基础上，本文还研究了若干参数对其临界流速的影响。

关键词：输液曲管；微分求积法；临界流速；颤振

中图分类号：O323　　文献标识码：A

1　引言

输液管的振动与稳定性问题，一直是结构动力学问题研究的重要内容之一。这不仅是因为它具有较高的理论研究价值，而且还有广阔的工程应用背景。关于这方面的研究动态与现状，文献[1,2]已作了详尽的评述。而输液曲管不同于输液直管，分析难度较大，近几年来已成为输液管研究的热点。Chen[3]用解析法对圆形输液曲管的稳定性进行了分析，Misra等人[4]用有限元法对复杂形状的输液曲管的临界流速进行了计算。有限元法是通用的数值方法，适用范围广，但在形成单元刚阵时需要作大量的数值积分运算，计算准备时间也较长。众所周知，微分求积方法(Differential Quadrature Method，简称DQM)也是一种用于求解边值/初值问题的有效的数值方法，它特别适合于规则几何形状的结构，且原理简单，易于实施，能以较少的计算工作量给出满足工程要求的解，目前该法已经成功地用于多种工程力学问题的求解[5]，并在不断地发展。与有限元法相比，该法避免了大量数值积分的计算，故计算工作量较少，计算时间也较少。本文将它推广到分析输液曲管的稳定性问题中去。实例表明，该方法计算效率较高，极易处理具有弹性边界的输液曲管。在此基础上，文中还研究了输液曲管主要参数对其临界流速的影响。

收稿日期：1999-05-06；修订日期：1999-09-12

基金项目：九五国家攀登预选项目资助(PD9521907)

作者简介：倪樵(1959)，男，山东省梁山县人，博士，副教授，主要从事力学教学与研究

2 运动方程

根据文献[3]，在不考虑内、外阻尼的影响下，对于中心线不可伸缩的面内振动，输液曲管无量纲形式的运动方程为

$$\begin{aligned} &u_{,qqqqqq}+(2+v^2)u_{,qqqq}+2b^{1/2}v(u_{,qqq})^{\bullet}+(1+2v^2)u_{,qq}\\ &+(u_{,qq})^{\bullet\bullet}+2b^{1/2}v(u_{,q})^{\bullet}+v^2u-u^{\bullet\bullet}=0 \end{aligned} \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned} &u=U/R,\quad b=M_f/(m_t+M_f),\quad v=(M_f/EI)^{1/2}RV,\\ &t=[EI/(m_t+M_f)]^{1/2}t/R^2,\quad (\,)_{,q}=\partial(\,)/\partial q,\quad (\,)^{\bullet}=\partial(\,)/\partial t \end{aligned} \tag{2}$$

分别表示输液曲管的无量纲切向位移、质量比、无量纲流速和时间等；U 为曲管中心线上任一点的切向位移，R 为曲管半径，EI 为曲管刚度系数，V 为流速，m_t 和 M_f 分别为曲管和流体单位长度的质量，q 为曲管中心线上任一点的角坐标(图 1)，t 为时间。

根据图 1 所示的坐标系及弹性曲梁理论，可知有如下几何关系及本构关系：

$$e=1/R(U_{,q}-W) \tag{3}$$

$$c=1/R^2(W_{,qq}+U_{,q}) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &N_p=EAe=EA/R(U_{,q}-W)\\ &M=EIc=EI/R^2(W_{,qq}+U_{,q})\\ &Q=M_{,q}/R=EI/R^3(W_{,qqq}+U_{,qq}) \end{aligned} \tag{5}$$

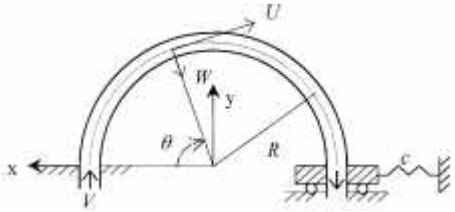

图 1 半圆输液曲管示意图

式中 W,e 和 c 分别为曲管中心线上任一点的径向位移、轴向应变和曲率，N_p、M 和 Q 分别为该点的轴力、弯矩和剪力；A 为曲管的横截面积。固定端的边界条件是(在 $q=0$)：

$$u=u_{,q}=u_{,qq}=0 \tag{6a}$$

(6a)中的第二式是因为中心线不可伸缩($e=0$)的缘故；在加有弹性支承的一端(在 $q=p$)：

$$u=u_{,qq}=u_{,qqqq}+u_{,qq}-cu_{,q}=0 \tag{6b}$$

3 DQ 法模拟方程及求解

DQM 本质上是把函数在给定网点上的各阶导数值近似地用域上全部网点处的函数值的加权和表示，考虑在区间[0,1]可微的一维函数 $f(x)$，有

$$L_k\{f(x)\}_i=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(k)}f(x_j) \tag{7}$$

其中 L_k 是线性微分算子，k 是阶数，N 是网点总数，$A_{ij}^{(k)}$ 是权系数，x_j 是网点的坐标值。方程(1)中有六个关于 z ($z=q/p$) 的微分算子：

$$L_1=(\,)_{,z},\quad L_2=(\,)_{,zz},\quad L_3=(\,)_{,zzz},\quad L_4=(\,)_{,zzzz},\quad L_5=(\,)_{,zzzzz},\quad L_6=(\,)_{,zzzzzz}$$

相应的权系数为 $A_{ij}^{(1)},A_{ij}^{(2)},A_{ij}^{(3)},A_{ij}^{(4)},A_{ij}^{(5)},A_{ij}^{(6)}$，采用 Su 和 Richards 的做法[5]来确定它们

$$A_{ij}^{(1)}=P(z_i)\big/P(z_j)(z_i-z_j),\qquad (i,j=1,2,\cdots,N;j\neq i) \tag{8}$$

其中

$$P(z_i)=\prod_{k=1,k\neq i}^{N}(z_i-z_k),\qquad P(z_j)=\prod_{k=1,k\neq j}^{N}(z_j-z_k) \tag{9}$$

高阶的权系数采用递推关系

$$A_{ij}^{(r)}=r(A_{ii}^{(r-1)}A_{ij}^{(1)}-A_{ij}^{(r-1)}/(z_i-z_j)) \qquad (i,j=1,2,\cdots,N;\ j\neq i) \tag{10}$$

对角项为

$$A_{ii}^{(r)}=-\sum_{k=1,k\neq i}^{N}A_{ik}^{(r)} \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{11}$$

采用下列公式划分区域得到非均匀网点，取网点数 $N=19$，边界点都采用 d 邻接处理[5]，d 为小量，一般取 10^{-3}~10^{-6}，即

$$\begin{aligned}&z_1=0,\quad z_2=d,\quad z_3=2d,\quad z_{N-2}=1-2d,\quad z_{N-1}=1-d,\quad z_N=1\\&z_i=\frac{1}{2}(1-\cos(\frac{i-3}{N-4}p)) \qquad (i=4,5,\cdots,N-3)\end{aligned} \tag{12}$$

将 DQM 应用于两端固定的半圆形输液曲管，可得到方程(1)的 DQM 模拟方程及相应的边界条件

$$u_i=0\quad (i=1,N-2),\qquad \sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(1)}u_j=0\quad (i=2,N-1),\qquad \sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}u_j=0\quad (i=3,N) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N}[A_{ij}^{(6)}+(2+v^2)A_{ij}^{(4)}+(1+2v^2)A_{ij}^{(2)}]u_j+v^2u_i+2b^{1/2}v\sum_{j=1}^{N}(A_{ij}^{(3)}+A_{ij}^{(1)})\dot{u}_j\\&+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}\ddot{u}_j-\ddot{u}_i=0 \qquad (i=4,5,\cdots,N-3)\end{aligned} \tag{14}$$

将(13)和(14)和合并写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix}[K_{bb}] & [K_{bd}]\\ [K_{db}] & [K_{dd}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{u_b\}\\ \{u_d\}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ [C_{db}] & [C_{dd}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\dot{u}_b\}\\ \{\dot{u}_d\}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ [\tilde{M}_{db}] & [\tilde{M}_{dd}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{u}_b\}\\ \{\ddot{u}_d\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \tag{15}$$

下标 b 表示边界上的量，d 表示非边界上的量，如

$$\{u_b\}=(u_1,u_2,u_3,u_{N-2},u_{N-1},u_N)^T,\qquad \{u_d\}=(u_4,u_5,\cdots,u_{N-3})^T \tag{16}$$

矩阵方程(15)中各子矩阵的元素也不难从(13)和(14)中得到。对于输液管的自激振动，方程(15)的解可写成

$$\{u\}=\{\bar{u}\}\exp(Wt) \tag{17}$$

$$\{u\}=\{\{u_b\}^T\{u_d\}^T\}^T \tag{18}$$

$\{\bar{u}\}$ 为待求的振幅函数。由于流速导致陀螺力的作用，W 一般为复数，$\mathrm{Im}(W)$ 为输液管的无量纲振动频率：

$$\mathrm{Im}(W)=R^2w[(m_t+M_f)/EI]^{1/2} \tag{19}$$

w 是曲管的实际振动频率。将(17)代入到(15)并消去 $\{\bar{u}_b\}$ 后，可以得到

$$(W^2[\tilde{M}]+W[C]+[K])\{\bar{u}_d\}=\{0\} \tag{20}$$

式中，$[\tilde{M}]$ 是质量阵，$[K]$ 是刚度阵，$[C]$ 为陀螺阵，$[K]$ 和 $[C]$ 中均含有无量纲流速 v 和质量

比 b 等参数。方程(20)构成了广义特征值问题，固定 b 值逐步加大管内液体的流速，可由方程(20)逐次确定相应的特征值 W，当 $\mathrm{Re}(W)>0$ 时，输液管失稳，发生颤振，如果发现 $\mathrm{Re}(W)$ 从负变到正，使 $\mathrm{Re}(W)=0$ 的流速为输液曲管的临界流速。

4 算例与讨论

为了验证本文方法的有效性，首先考虑两端固定的半圆输液曲管的面内运动，它已被 Chen[3]研究过。图 2 显示了曲管的无量纲流速与其无量纲振动频率的变化关系曲线，当流速 v=0 时，曲管就是一个半圆环。随着流速的增加，曲管的振动频率变小，当流速超过一定的值，曲管的第一阶模态将发生屈曲失稳。进一步增加流速，其高阶模态也将失稳。值得注意的是，本文的结果与 Chen[3]的结果相当吻合，说明了本文方法及所编制程序的正确性。图 3 与图 4 是两端固定半圆输液曲管前 4 阶模态的 Argand 图，图中曲线上的数字是无量纲流速，当曲线第一次触到纵轴($\mathrm{Im}(W)=0$，即其频率为 0)时，将引起管的屈曲失稳，这时的流速便是管的屈曲失稳时的临界流速。从图中可清楚地看到，当流速超过 3.88 后，曲管第一、二阶模态曲线以对称的方式离开横轴($\mathrm{Im}(W)=0$)即所谓的模态耦合颤振失稳，当继续增加流速至 5.90 后,第三、四阶模态也将出现模态耦合颤振失稳，这与输液直管类似[1]。

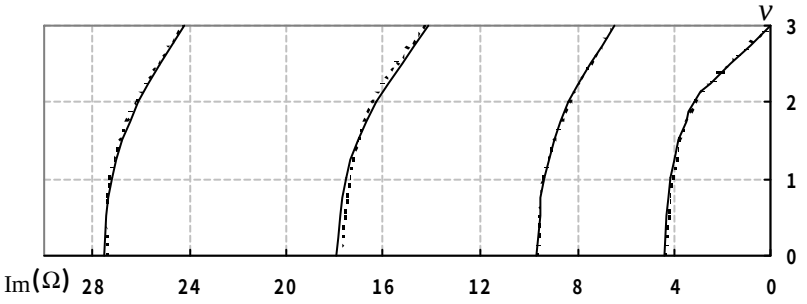

图 2 两端固定半圆输液曲管的无量纲振动频率与无量纲流速的变化关系曲线。虚线表示 Chen[3]的结果，实线是本文的结果。(b =0.5)

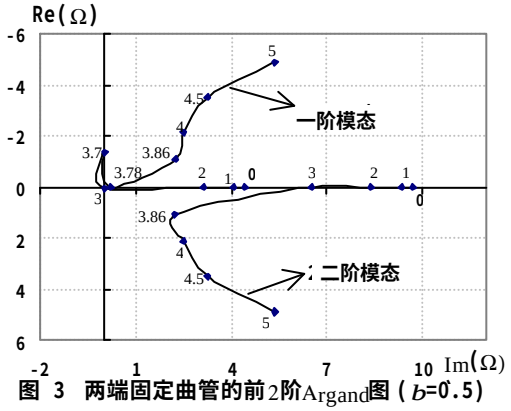

图 3 两端固定曲管的前2阶Argand图 (b=0.5)

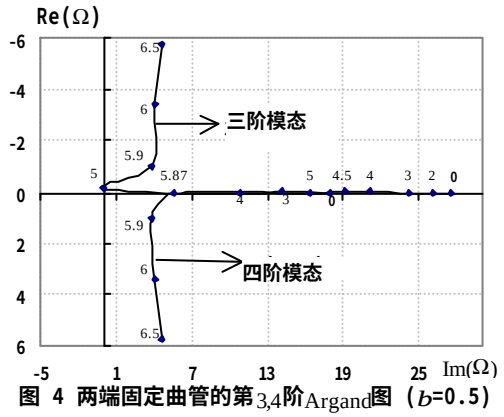

图 4 两端固定曲管的第3,4阶Argand图 (b=0.5)

然后对同一个半圆曲管，将其出口端的径向位移约束用一弹簧支承代替，其无量纲弹簧刚度系数为 c(图 1)，当取质量比为 b =0.5，c =20，图 5 是曲管前四阶模态的 Argand 图。由于支承形式的改变，曲管的失稳形式不再是模态耦合颤振。只是曲管的第四阶模态在当流速超过 3.46 后发生颤振失稳，因为该阶模态的曲线当流速 v=3.46 时，从横轴的上方 ($\mathrm{Re}(W)<0$)下穿横轴($\mathrm{Re}(W)=0$)并继续向下($\mathrm{Re}(W)>0$)，并且此时 $\mathrm{Im}(W)\neq 0$，这意味着该阶曲管振动的振幅将随时间的增加而不断增长，属动力不稳定行为即颤振，颤振将严重威胁结构的安全与稳定。使 $\mathrm{Re}(W)=0$ 的门槛值流速便是引起曲管颤振失稳的临界流速。而其它各阶不会发生颤振失稳。图 6 描绘了当取无量纲弹簧系数 c=1 时，无量纲临界流速 v_c 与质量比 b 的变化关系。图 7 描绘了当取质量比 b =0.5 时，无量纲临界流速 v_c 与无量纲弹簧系数 c 的变化关系，从中可以观察到，对于不同的 c(c<20)，引起颤振的临界流速几乎不变，约为 3.46，而引起屈曲失稳的临界流速会随着 c 的增大而增大，但不会超过 3。

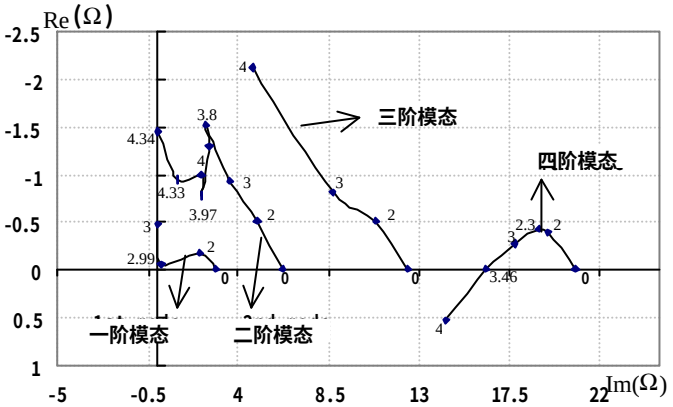

图 5 加有弹性支承的半圆输液曲管的前4阶模态的Argand图 (b=0.5,c=20)

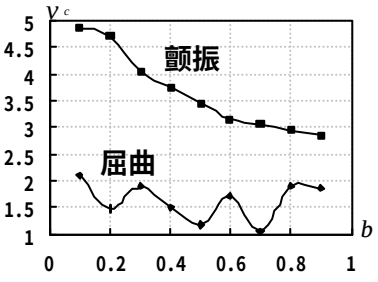

图 6 加有弹性支承的输液曲管的无量纲临界流速与质量比的变化关系曲线 (c=1)

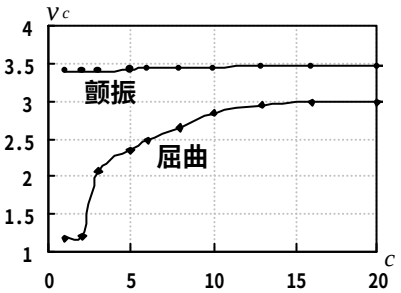

图 7 加有弹性支承的输液曲管的无量纲临界流速与质量比的变化关系曲线 (b=0.5)

在输液曲管稳定性问题的分析中，DQM 显示出其独特的优点，极易处理具有弹性支承的输液管，且计算量较少，因为 DQM 的计算规模取决于离散网点的数目，本文算例的网点数目为 19，考虑曲管两端的边界条件之后，待求方程(20)的阶数只有 13，其中的系数可

依公式(8)-(12)等由电脑自动算得，精度也令人满意。进一步研究可望将其推广到输液管的非线性分析中去。

参考文献：

[1] Paidoussis, M. P. and Li G X. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem[J]. J.Flui. & Stru., 1993, 8: 853-876.

[2] 黄玉盈，等. 输液管的非线性振动、分叉与混沌--现状与展望[J]. 力学进展，1998, 28(1): 30-42.

[3] Chen, S. S. Flow induced in-plane stability of curved pipes[J]. Nucl. Engrg. & Desi., 1973, 23: 29-38.

[4] Misra, A. K. and Paidoussis, M. P. On the dynamics of curved pipes transporting fluid. Part I: Inextensible theory[J]. J. Flui. & Stru., 1988, 2: 221-224.

[5] Bert, C. W. and Malik, M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review[J]. Appl. Mech. Rev., 1996, 49(1): 1-27.

DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD FOR THE STABILITY ANALYSIS OF SEMI-CIRCULAR PIPE CONVEYING FLUID WITH SPRING SUPPORT

NI Qiao[1] , ZHANG Hui-lan[2] , HUANG Yu-ying[1] , CHEN Yi-ping[1]

(1.Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074;

2.Zhongnan University of Finance and Economics, Wuhan 430070)

Abstract: An attempt is made the extend the Differential Quadrature Method (DQM) to the stability analysis of curved pipes conveying fluid. The influence of several parameters on the critical flow velocity is studied. In comparison with other numerical methods, the differential quadrature method can deal with the problem easily due to its mathematical simplicity and avoidance of numerical integration. It is demonstrated that the application of DQM to the solution of the oth-order governing equation with unequally spaced sampling points is successful.

Key words: curved pipe conveying fluid; DQM; critical flow velocity; flutter