研究通讯

局部紧正则 Locale 的正则紧化

1980 年, Banaschewski[1] 给出了 locale 的完全正则紧反射的刻划, 并且证明了正则紧反射的存在性, 在假设选择公理前提下 locale 的完全正则紧反射和正则紧反射是等价的, 但如果不假设选择公理, 则两个反射不等价, 而 locale 的正则紧反射的具体刻划却很难给出. 由于 locale 的最大正则紧化即 locale 的正则紧反射, 因此一个自然的问题是 locale 自身满足什么样的格论条件存在最大的正则紧化? 1984 年, Johnstone[2] 给出了一个充分条件, 证明了正规的正则 locale 存在的最大的正则紧化, 本文则证明了局部紧正则 locale 存在最大的正则紧化, 并且在此基础上证明了以下定理: locale A 是局部紧正则的当且仅当 A 的全体正则紧化之集构成完备格. 作为一个自然的推论, 得到了拓扑空间局部紧性的一个格论刻划, 从一个侧面表明了拓扑结构与序结构之间的内在联系.

如无特别说明, 本文不假设选择公理, 所有证明均是构造性的. 文中术语和符号均参见文献[3].

由文献[4]知道, locale A 的任意正则紧化均可看作 A 的理想格 $\mathrm{Idl}(A)$ 的某个正则子 frame B, 使得上确界映射 $\vee: B \to A$ 是满映射, 记所有满足该条件的 $\mathrm{Idl}(A)$ 的正则子 frame 之集为 $RI(A)$, 赋予包含序, 由文献[4], 命题 2 的证明容易看出, 下面事实成立:

命题 1 $K(A)$ 同构于 $RI(A)$.

引理 1 任一 frame 都存在一个最大的正则子 frame.

命题 2 局部紧正则 locale 存在一个最大的正则紧化.

定理 1 Locale A 是局部紧正则的当且仅当 $K(A)$ 是完备格.

如果假设选择公理, 有下面推论.

推论[AC] 拓扑空间 X 是局部紧的当且仅当 X 的全体紧化之集在通常的紧化序关系下构成完备格.

致谢 作者感谢导师刘应明教授的指导.

参 考 文 献

1 Banaschewski B, Mullvey C J. Stone-Cech compactification of locales. Houston J Math, 1980, 6:301～312
2 Johnstone P T. Wallman compactification of locales. Houston J Math, 1984, 10:201～207
3 Johnstone P T. Stone Space. Cambridge: Cambridge University Press, 1983
4 Banaschewski B. Compactification of frames. Math Nachr, 1990, 149:105～116

贺 伟
(四川联合大学数学系, 成都 610064)