研究简报

关于单 K_4-群*

施武杰

（西南师范大学数学系，重庆 630715）

关键词　有限群、单 K_4-群、分类定理

确定某种类型阶的单群已有不少结果(见文献[1—6])，其中文献[2]证明了有限群 G 的阶的相异素因子数 $|\pi(G)|$ 为 3 的单群是下述群之一： A_5, A_6, $L_2(7)$, $L_2(8)$, $L_2(17)$, $L_3(3)$, $U_3(3)$ 及 $U_4(2)$. 文献[7]称上述单群为单 K_3-群，并指出它们的分类只能作为所有的有限单群分类的一个推论.

本文首先给出所有的 $3'$ 单 K_4-群(即 $3\nmid|G|$，且 $|\pi(G)|=4$ 的单群)，再用单群分类定理定出所有的单 K_4-群. 从而推广了文献[3—6]中的结论. 我们所讨论的群恒为有限，群后括弧中的数字表示该群的阶，其它符号都是标准的.

定理 1　设 G 是 $3'$ 单 K_4-群，则 $G\simeq S_z(8)(2^6\cdot5\cdot7\cdot13)$，或 $G\simeq S_z(32)(2^{10}\cdot5^2\cdot31\cdot41)$.

证　因 G 是 $3'$ 单群，由文献[8]知 $G\simeq S_z(2^{2m+1})$, $m\geqslant1$. 于是

$$|G|=2^{2(2m+1)}(2^{2m+1}-1)(2^{2m+1}+2^{m+1}+1)(2^{2m+1}-2^{m+1}+1).$$

因上式三个括弧中的数字两两互素，又 $2^{2(2m+1)}+1\equiv0(\mathrm{mod}5)$，于是由 $|\pi(G)|=4$ 知 $2^{2(2m+1)}+1=5^\alpha\cdot t^\beta$，$t$ 为异于 5 的素数，$\alpha\beta\neq0$. 若 $\alpha\geqslant3$，则由 $(5-1)^{2m+1}+1\equiv0(\mathrm{mod}5^3)$ 推出 $2m+1=5^2k$. 但此时由 k 为奇数，有 $(2^2)^{2m+1}+1=(2^{50})^k+1=(2^{50}+1)(\cdots\cdots)$. 因 $2^{50}+1$ 已含三个相异素因子，故 $\alpha\leqslant2$. 而由 $2^{2m+1}+2^{m+1}+1\leqslant5^2$ 或 $2^{2m+1}-2^{m+1}+1\leqslant5^2$ 推出 $m=1$ 或 2，即 $G\simeq S_z(8)$ 或 $G\simeq S_z(32)$.

为定出所有的单 K_4-群，需要下述引理：

引理 1[9]　设 r 是素数，b 为正整数，则下列结论之一成立：1)存在一个素数 s, $s|r^b-1$，且 $s\nmid r^c-1$, $0<c<b$; 2) $r=2$, $b=1$ 或 6; 3) r 为 Mersenne 素数，且 $b=2$.

引理 2　不定方程 $p^m-2q^n=\pm1$，p,q 为素数，$m>1$, $n>1$，除 $239^2-2\cdot(13)^4=-1$ 以及 $3^m-2q^n=1$，m,q 为奇数之外，如有解，则 $m=n=2$.

证　见文献[10,11]. 对于不定方程 $3^m-2q^n=1$，$m=5$，$n=2$，$q=11$ 是它的解，且是 n 为偶时的唯一解，是否还有其它解？这是不定方程中一个未解决的问题.

引理 3[12]　不定方程 $p^m-q^n=1$，p,q 是素数，$m>1$，$n>1$，仅有解 $p=3$, $m=2$; $q=2$, $n=3$.

引理 4　不定方程 $r^{2m}-1=s^at^b$，r,s,t 为素数，$s<t$, $m\geqslant1$, $a\geqslant1$, $b\geqslant1$，仅有

本文 1990 年 9 月 13 日收到. 1991 年 4 月 23 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

解 $(r, m; s, a; t, b)$ 为 $(2,2;3,1;5,1)$, $(2,3;3,2;7,1)$, $(3,2;2,4;5,1)$, $(5,1;2,3;3,1)$, $(7,1;2,4;3,1)$以及$(17,1;2,5;3,2)$.

证 由引理3, 分 $r=2$, $r=3$, $r \neq 2,3$ 三种情形讨论即得.

引理5 下述不定方程均有解且不唯一:

$$r^2-1=2^a \cdot 3^b \cdot u^c, \tag{1}$$

$a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, $c \geqslant 1$, r,u 为素数, $u>3$.

$$\begin{cases} 2^m-1=u, \\ 2^m+1=3 \cdot t^b, \end{cases} \tag{2}$$

$m \geqslant 1$, u,t 为素数, $t>3, b \geqslant 1$.

$$\begin{cases} 3^m+1=4t, \\ 3^m-1=2u^c, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} 3^m+1=4t^b, \\ 3^m-1=2u, \end{cases} \tag{4}$$

$m \geqslant 1$, u,t 为奇素数, $b \geqslant 1, c \geqslant 1$.

证 容易验证 $r=11,13$ 均为方程(1)的解; $m=5,7$ 为方程(2)的解; $m=3,5$ 为方程(3)的解;而 $m=3,7$ 为方程(4)的解.

注 不定方程(1)—(4)有多少解? 有有穷多个还是无穷多个解? 这是一个未解决的问题. 当 $c>1$ 时,易知方程(3)仅有唯一解.

引理6 不定方程 $r^{2m}-1=s^a t^b u^c$, r,s,t,u 为素数, $s<t<u$, $m \geqslant 1$, $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1, c \geqslant 1$仅有下述解: 1) $r \neq 2,3$ 时, $m=1$, $s=2$, $t=3$, 且满足不定方程(1),或者 $(r,m;s,a;t,b;u,c)$ 为$(5,2;2,4;3,1;13,1)$或$(7,2;2,5;3,1;5,2)$; 2) $r=2$ 时, $s=3$, 且满足方程(2), 或者 $(2,m;3,a;t,b;u,c)$ 为 $(2,4;3,1;5,1;17,1)$;3) $r=3$ 时, $s=2$, 且满足方程(3)或(4),或者 $(3,m;2,a;t,b;u,c)$ 为$(3,4;2,5;5,1;41,1)$.

证 由引理2—3, 分 $r=2$, $r=3$, $r \neq 2,3$三种情形讨论即得.

定理2 设G是单 K_4-群,则G同构于下述单群之一:

1) $A_7(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$, $A_8(2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$, $A_9(2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7)$, $A_{10}(2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7)$;

2) $M_{11}(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11)$, $M_{12}(2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11)$, $J_2(2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7)$;

3) (a)$L_2(r)$, r为素数,且满足方程(1); (b) $L_2(2^m)$, m满足方程(2);(c)$L_2(3^m)$,m满足方程(3)或(4); (d) $L_2(16)(2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17)$,$L_2(25)$ $(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13)$, $L_2(49)(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2)$, $L_2(81)(2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 41)$,$L_3(4)(2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$, $L_3(5)(2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 31)$, $L_3(7)(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 19)$, $L_3(8)(2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 73)$, $L_3(17)(2^9 \cdot 3^2 \cdot 17^3 \cdot 307)$, $L_4(3)(2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 13)$, $S_4(4)$ $(2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17)$, $S_4(5)(2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 13)$, $S_4(7)(2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^4)$, $S_4(9)(2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 41)$, $S_6(2)(2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7)$, $O_8^+(2)(2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7)$, $G_2(3)(2^6 \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 13)$, $U_3(4)(2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13)$, $U_3(5)(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7)$, $U_3(7)(2^7 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 43)$, $U_3(8)(2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19)$, $U_3(9)(2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 73)$, $U_4(3)(2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7)$, $U_5(2)(2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 11)$,$S_z(8)(2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13)$, $S_z(32)(2^{10} \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 41)$,${}^3D_4(2)(2^{12} \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 13)$,${}^2F_4(2)'(2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13)$.

证 用有限单群分类定理,只需验证单群的阶即可. 当G是交错型或散在型单群时,结论1)、2)显然成立. 而当G为李型单群时,由引理1知G的李秩≤4. 再根据引理2、3、4、6分情形讨论即得. 当G为$S_z(2^{2m+1})$时,直接由定理1得出结论.

单 K_4-群究竟有多少个？它取决于不定方程(1)—(4)的解数. 当单 K_4-群的素因子全部或部分给出时，方程(1)—(4)的解有可能全部求出. 文献[6]给出了所有的 $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d$ 阶单群，而下述推论则分别是文献[4]或[5]的推广.

推论 1（文献[4]的推广） 设 G 是 $2^a\cdot 3^b\cdot 7^c\cdot p$ 阶单群，p 为素数，$p\neq 2,3,7$，$abc\neq 0$，则 G 同构于下列单群之一：A_7,A_8,A_9；$L_2(q)$，$q=13,27,97,127$，$L_3(4)$，$L_3(7)$，$S_6(2)$，$G_2(3)$，$U_3(7)$，$U_3(8)$，$U_4(3)$，${}^3D_4(2)$.

推论 2（文献[5]的推广） 设 G 是 $2^a\cdot 3^b\cdot 5\cdot p^c$ 阶单群，p 为素数，$p\neq 2,3,5$，$abc\neq 0$，则 G 同构于下列单群之一：A_7,A_8,A_9；M_{11},M_{12}；$L_2(q)$，$q=11,16,19,31,81$，$L_3(4)$，$L_4(3)$，$S_6(2)$，$U_4(3)$，$U_5(2)$.

推论 3（文献[5]的推广） 设 G 是 $2^a\cdot 3^b\cdot 7\cdot p^c$ 阶单群，p 为素数，$p\neq 2,3,7$，$abc\neq 0$，则 G 同构于下列单群之一：A_n，$n=7,8,9,10$；J_2；$L_2(q)$，$q=13,27,127$，$L_3(4)$，$S_6(2)$，$O_8^+(2)$，$G_2(3)$，$U_3(5)$，$U_3(8)$，$U_4(3)$.

推论 4 设 G 是 $2^a\cdot 11^b\cdot p^c\cdot q^d$ 阶单群，p,q 为异于 2 和 11 的相异素数，$abcd\neq 0$，则 G 同构于下列单群之一：M_{11},M_{12}；$L_2(q)$，$q=11,23,32,243$，$U_5(2)$.

段学复教授曾指出，确定哪些单群的阶不恰含素数的一次幂是一个非常困难的问题(见文献[13]). 对于单 K_4-群，虽然我们还不知其个数是有穷多还是无穷多，但由定理 2 及方程 (1)—(4)知如下结论成立.

推论 5 除 $S_4(7)$ 外，单 K_4-群的阶均含素数的一次幂.

参 考 文 献

[1] Brauer, R. and Tuan, H. F., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51**(1945), 756—766.
[2] Herzog, M., *J. Algebra*, **10**(1968), 383—388.
[3] 刘力前，数学学报，**28**(1985)，319—332.
[4] Alex, L. J., *J. Algebra*, **25**(1973), 113—124.
[5] Tchakerian, K. B., *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **33**(1980), 8: 1037—1038; 9: 1165—1167.
[6] 施武杰，西南师范大学学报(自然科学版)，1987，4: 1—8.
[7] Gorenstein, D., *Finite Simple Groups*, Plenum Press, New York and London, 1982, 12—14.
[8] Thompson, J. G., *Symp. Math.*, XIII Acad. Press, London, 1974, 517—530.
[9] Zsigmondy, K., *Monatsh. Math. Phys.*, **3**(1892), 265—284.
[10] Crescenzo, P., *Adv. Math.*, **17**(1975), 25—29.
[11] 孙琦，数学研究与评论，**6**(1986)，20.
[12] 柯召、孙琦，谈谈不定方程，上海教育出版社，1980.
[13] 陈重穆，数学学报，**30**(1987)，5: 605—613.