文章编号:1001 - 9081(2008)12 - 3116 - 04

基于图割的目标提取实时修正算法

徐秋平[1,2],郭 敏[1],王亚荣[2]
(1. 陕西师范大学 计算机科学学院,西安 710062; 2. 武警工程学院 教育技术中心,西安 710086)
(guomin@ snnu. edu. cn)

摘 要:对目标提取结果进行后期修正是进一步提高提取精度的重要举措。针对在前期目标提取算法框架内实现修正困难、局限较多、难于推广等不足,提出了一种基于图割理论的独立修正算法。首先通过人机交互选定修正区域,然后映射成 s-t 网络,最后运用最大流/最小割算法对 s-t 网络进行切割得到修正后的目标轮廓。实验表明,该方法不仅操作简便,实时响应,不破坏已有的正确提取结果;而且参数少,抗噪能力强,适用于一般的基于轮廓的目标提取。

关键词:目标提取; 图割; 提取修正; 组合优化
中图分类号: TP391 **文献标志码**:A

Real-time correcting algorithm of extracted contour based on graph cuts

XU Qiu-ping[1,2], GUO Min[1], WANG Ya-rong[2]
(1. *School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an Shaanxi* 710062, *China*;
2. *Instructional Technology Centre of Engineering, College of Armed Police Force, Xi'an Shaanxi* 710086, *China*)

Abstract: Post correcting of the extracted contour is an important measure to further improve extraction accuracy. Aiming at the difficulty and limitation of correcting implementation and generalization within the corresponding extracting algorithm framework, an independent correcting algorithm based on graph cuts was proposed. At first, the region to be corrected was obtained by human-computer interaction. Then the region was mapped into an s-t network. Finally a corrected object contour was obtained using the max-flow/min-cut algorithm. The experimental results show that the simplification, real-time responding, and strong anti-noise ability of the proposed approach are suitable for general contour-based object extraction.

Key words: object extraction; graph cuts; extraction correcting; combinatorial optimization

0 引言

目标提取是指利用灰度、颜色、纹理、形状等信息从图像中提取出所感兴趣的目标,它是图像工程中目标表达、特征提取和参数测量的基础,使得更高层的图像分析和理解成为可能。人们利用各种数学理论和工具,使用不同的模型,研究出了错综复杂的目标提取方法,形成了一个庞大的体系。近年来,基于能量最小化理论,人们提出了融合高层视觉线索以及上下文信息的分割框架。其中,文献[1]定义了一条内力、图像力以及外部约束力共同作用的能量极小化样条曲线,提出了经典的参数活动轮廓模型(Snake 模型)。文献[2]利用轮廓曲线的几何特性,建立轮廓曲线运动的能量极小化函数,提出了几何形式的活动轮廓模型(Mumford-Shah 模型),该模型与水平集(level set)[3]方法相结合,成为目前广泛关注的目标提取方法。文献[4]则引入图割理论,利用最大流/最小割算法,提出了全局组合优化的目标提取方法。

目前,上述基于先验知识和人机交互的半自动目标提取方法已成为目标提取研究领域的主流和热点。但是,鉴于目标提取问题的复杂性,所有方法都无法做到对目标的 100% 正确提取,因此,对提取结果中的局部错误进行修正是进一步提高提取精度的重要举措。对基于 Snake 模型和 Mumford-Shah 模型的目标提取方法,由于其基于变分法的作用机理而难以在其算法框架内进行修正,目前也尚未见相关文献报导。在基于图割的目标提取方法中,GCBAC(Graph Cuts based Active Contours)[5]算法通过在目标边界添加硬约束点,约束轮廓线必须经过所添硬约束点来实现修正,但每添加一个硬约束点后整个环状区域都要重新进行切割,甚至可能因为强制通过指定点导致已有正确轮廓曲线段的破坏而造成新的错误。Interactive graph cuts[4,6]算法及 GrabCut[7]算法通过在错误区域添加目标或背景的种子来实现修正,虽然这两种方法无需对整个目标边界重新提取,达到了快速修正的目的,但都局限于相应算法框架内,难以推广至一般的目标提取算法中。此外,stereo cue cut[8], active graph cuts[9]等基于图割的提取算法均未能提供后期修正。

对目标提取结果进行后期修正是对上述人机交互半自动目标提取方法的重要补充与完善,在医学等需要精确提取目标的领域中显得尤为重要。可以看出,在相应目标提取算法框架内设计修正算法比较困难且局限较多,也难于推广。本文基于图割理论提出的独立于前期目标提取的实时修正算法不仅操作简便,快速响应,不破坏已有的正确提取结果;而且参数少,抗噪能力强,适用于一般的基于轮廓的目标提取。

1 图割基本理论

图割理论的核心思想在于构造一个能量函数,然后运用组合优化技术来最小化该能量函数。该理论不仅成功地应用于目标提取,而且为解决更一般的计算机视觉问题提供了一

收稿日期:2008 - 06 - 05;**修回日期**:2008 - 07 - 17。
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2005A12);陕西师范大学研究生培养创新基金资助项目(2008CXS025)。
作者简介:徐秋平(1976 -),男,江西樟树人,讲师,硕士研究生,主要研究方向:图像处理、模式识别; 郭敏(1964 -),女,江苏镇江人,副教授,博士,主要研究方向:模式识别、图像处理、数据融合; 王亚荣(1976 -),女,陕西西安人,讲师,主要研究方向:图像处理。

个基本框架。

计算机视觉问题大多可归为标号问题,如目标分割问题就是一个将一部分像素标为“目标”,另一部分像素标为“背景”的标号问题,通过能量最小化模型、网络的构造及网络流理论,可以把标号问题转换为用最大流/最小割方法来解决。

1)能量最小化模型。为了计算像素的标号,需要构造一个关于标号的能量函数。计算机视觉中常用的约束有数据约束和光滑约束,数据约束即不同图像上对应点的亮度应一致;光滑约束即同一图像上相邻点的亮度应相似,它体现了区域内部的连续性和边界的不连续性。根据数据约束和光滑约束,人们通常使用 Potts 模型来表达能量函数:

$$E(f) = E_{\text{data}}(f) + E_{\text{smooth}}(f) = \sum_{p\in P} D_p(f_p) + \sum_{\{p,q\}\in \mathbf{N}} D_{p,q}(f_p, f_q) \tag{1}$$

其中,P 为图像像素集,f 为 P 的一个标号 $f:P\mapsto L$(L 为离散的标号集),数据项 $E_{\text{data}}(f)$ 用来衡量 f 和所观察到的数据的不一致性,光滑项 $E_{\text{smooth}}(f)$ 用来衡量 f 非分片光滑的程度,N 表示相互作用的像素对(一般表示相邻的像素对)。

就目标提取问题而言,数据项 $E_{\text{data}}(f)$、光滑项 $E_{\text{smooth}}(f)$ 可进一步具体表示为:

$$E_{\text{data}}(f) = \sum_{p\in P} -\ln \Pr(I_p \mid f_p) \tag{2}$$

$$E_{\text{smooth}}(f) = \lambda \sum_{\{p,q\}\in \mathbf{N}} \delta_{f_p\neq f_q} \cdot dist(p,q)^{-1} \cdot \exp -\beta(I_p - I_q)^2 \tag{3}$$

其中,$\Pr(\cdot\mid f)$ 为目标/背景的概率密度模型,I_p 为像素灰度值(彩色值),λ 为数据项与平滑项的均衡系数,$dist(p,q)$ 为像素 p,q 之间的距离,$[\cdot]$ 为取期望值操作。此外,

$$\delta_{f_p\neq f_q} = \begin{cases} 1, & f_p \neq f_q \\ 0, & f_p = f_q \end{cases} \tag{4}$$

$$\beta = (2\langle (I_p - I_q)^2 \rangle)^{-1};\ \{p,q\} \in \mathbf{N} \tag{5}$$

2)网络的构造。设 $G=(V,E)$ 为一无向图,其中,V 为顶点集,E 为边集。对于连接顶点集 V 中 x, y 的一条边 e,可视为从 x 到 y 和从 y 到 x 两个不同的方向,分别记为 (e, x, y) 和 (e, y, x)。对于 G 的每条边都进行上述操作,所获得的有向边集合记为 E。在 E 上定义容量函数 $c:E\to R^+$。称上述图 G 及其边集上定义的容量函数 c 构成了一个 s-t 网络,记作 $N=(G, s, t, c)$,其中,s, t 分别称为源点和汇点。称满足如下条件的函数 $\psi:E\to R$ 为网络的一个流:

①对任意 $(e,x,y)\in E(x\neq y)$, $\psi(e,x,y) = -\psi(e,y,x)$;

②对任意 $x\in V\backslash\{s,t\}$, $\psi(x,V) = \sum_{(e,x,y)\in E} \psi(e) = 0$;

③对任意 $e\in E, \psi(e)\leqslant c(e)$。

此时,称 $\psi(x,V) = \sum_{(e,s,x)\in E} \psi(e)$ 为流 ψ 的流量。若 $S\subseteq V$ 且 $s\in S, t\in V\backslash S$,称 S、$V\backslash S$ 之间的边的集合为网络 N 的一个割,割的容量定义为割中各条边容量之和,称网络 N 中容量最小的割为网络 N 的最小割。

一般地,图像中像素对应网络的节点,像素特征之间的差异或相似性对应边上的容量,通过以上方式将图像映射到一个网络,使得网络割的容量对应视觉问题的能量函数。

3)最大流/最小割定理。文献[10]证明了网络流理论中著名的最大流/最小割定理,即网络的最大流与最小割的等价性。目前,对网络最大流问题已可在多项式时间内求解。

基于图割理论求解计算机视觉问题的基本框架可用图 1 来描述:首先根据能量最小化模型构造能量函数,把视觉问题转化为能量函数最小化问题;然后通过构造网络,使能量与网络的割的容量相对应;最后根据最大流/最小割算法给出能量函数的最小化解,从而获得视觉问题的解。

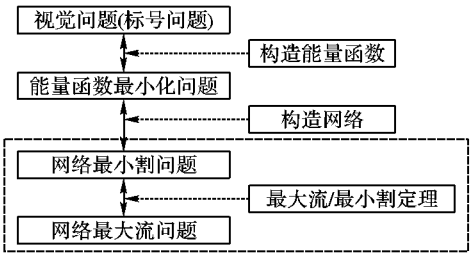


图 1　基于图割理论求解计算机视觉问题的基本框架

2　本文方法

2.1　修正算法的基本特性要求

修正算法是通过人机交互的方式对前期目标提取结果进行调整,使其更加准确、完善。考虑人机交互的特点以及修正操作的功能实现,本文认为,一个好的修正算法应该满足以下基本特性要求。

1)操作简便。目标提取的局部错误往往难以再通过算法本身来自动判别,一般需要采取人工采集样本点或样本区域等方式来指明错误,然后算法根据所提供的反馈信息进行修正。由于需要人的参与,因此,对反馈操作不能过于复杂,而应简单、方便、快捷,算法应在尽可能少的反馈信息输入下完成修正。

2)快速响应。修正过程通常需要一次或多次人机交互操作来完成,算法应对每次的人工输入迅速作出反应,以避免造成停顿感。修正算法还应在尽量小的范围内进行快速调整,要避免重新启动目标提取操作以造成过大的时间消耗。

3)不破坏已有的正确提取结果。修正操作是整个目标提取过程中的一个重要补充与完善,是对提取结果的进一步加工,因此,不能因为修正而带来新的更大的错误,更不能破坏已有的正确结果。

2.2　算法设计

本文算法基本思想是:首先经过前期目标提取操作得到一条存在局部错误的轮廓线,然后以人机交互方式选定一块包括局部错误在内的小区域(以下称为“修正区域”),最后将该区域映射成一个 s-t 网络,运用最大流/最小割算法对该网络进行切割,得到目标边界在该区域内的正确轮廓线。

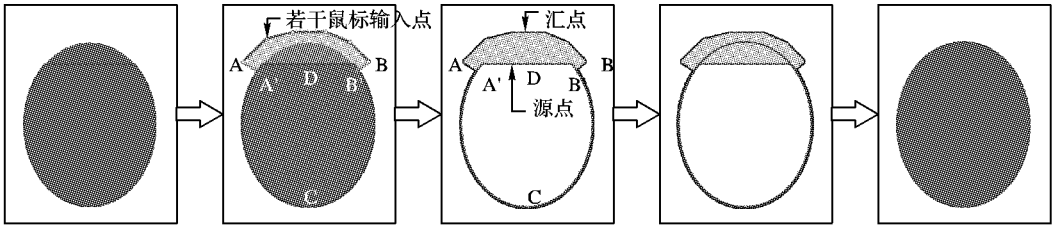
算法流程如图 2 所示。

1)输入前期提取的轮廓线(记作 C_{INN})。

2)通过鼠标操作输入(鼠标左键连续输入若干坐标点,鼠标右键结束输入)折线 $A'ABB'$ 与轮廓线 C_{INN} 对应的曲线段 $\widehat{A'DB'}$ 封闭形成修正区域,A'、B' 分别为轮廓线 C_{INN} 上距离第一个输入点 A 及最后一个输入点 B 最近的点。

3)根据 Potts 模型映射成单源单汇的 s-t 网络。已有正确的边界轮廓曲线段 $\widehat{A'CB'}$ 向外膨胀一个像素后与折线 $A'ABB'$ 连接构成的封闭曲线 C_{OUT} 作为网络的汇点,轮廓线 C_{INN} 作为网络的源点,修正区域中的像素对应网络的节点,相邻节点间以 8 邻域方式连接。

4)用最大流/最小割算法对 s-t 网络进行切割,输出修正后的轮廓线。



(a) 前期提取轮廓线 (b) 待修正区域 (c) s-t网络的构造 (d) s-t网络的切割 (e) 修正后的轮廓线

图 2 基于图割的交互式目标提取修正算法流程

在具体设计时,有三大难点需要解决:1)修正区域的选定如何做到操作简便;2)如何将修正区域映射成相应的 s-t 网络以便进行最大流/最小割算法切割;3)修正后的边界曲线段如何与已有正确的边界曲线段无缝连接。

1)修正区域的选定。本文通过极少的鼠标操作,简单、方便、快捷地实现了修正区域的选定。如图 2(b)所示,首先在待修正的目标边界段附近通过鼠标左键连续输入若干坐标点,并即时用直线将坐标点依次连接,最后以鼠标右键结束输入。在输入第一个坐标点 A 及最后一个坐标点 B 时,算法在轮廓线 C_{INN} 上对应计算出距离这两点最近的点 A'、B' 并分别用直线连接。整个输入的折线 $A'ABB'$ 与轮廓线 C_{INN} 上对应的曲线段 $\widehat{A'DB'}$ 一起构成封闭的待修正区域。

2)s-t 网络的构造。网络构造是本文算法设计的核心,要求所构造的网络不仅能被最大流/最小割算法有效切割,以得到修正区域中目标边界的正确轮廓曲线段,而且修正后的轮廓曲线段应与原有正确提取的轮廓曲线段无缝连接。根据能量最小化模型及网络流理论,结合选定的修正区域,构造如下网络。

①网络拓扑结构的构造。如图 2(c)所示,将已有正确的边界曲线段 $\widehat{A'CB'}$ 向外膨胀一个像素后与折线 $A'ABB'$ 相连接,构成一条封闭曲线(记作 C_{OUT}),以 C_{OUT} 为外边界、C_{INN} 为内边界,得到一块环状的切割区域,若称曲线段 $\widehat{A'CB'}$ 所在区域为辅助区域,则整个图像切割区域由修正区域和辅助区域两部分组成(图 3)。

以切割区域的内边界 C_{INN} 作为网络的源点 s,外边界 C_{OUT} 作为网络的汇点 t,切割区域中的像素对应网络的节点,相邻节点间以 8 邻域方式连接,由此构成了切割区域对应的 s-t 网络。以这种方式构造网络具有如下优点:

(a)对已有的正确提取结果,既不破坏也不重新提取。根据网络流理论,将图像切割区域的内、外边界映射成网络的源点、汇点,保证了用最大流/最小割算法对切割区域进行切割时能得到唯一一条位于环状切割区域之内的封闭曲线。在辅助区域内,由于其宽度为 0,因此对其切割得到的曲线段仍为 $\widehat{A'CB'}$,即所得曲线一定为已有正确提取的边界曲线段;而且由于辅助区域的边界被映射到网络的单个源点、汇点中,因此切割时间不计。

(b)保证了对修正区域切割得到的曲线段能与已有正确提取的边界曲线段无缝连接。对整个切割区域进行切割时得到的曲线封闭唯一,且在辅助区域切割得到的曲线段一定为 $\widehat{A'CB'}$,因此,在修正区域切割得到的曲线段一定与 $\widehat{A'CB'}$ 无缝连接,即一端与 A′相连,另一端与 B′相连。

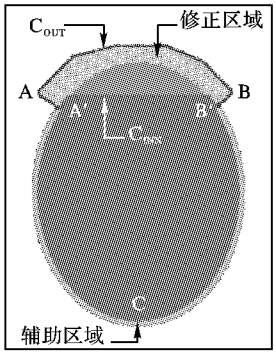


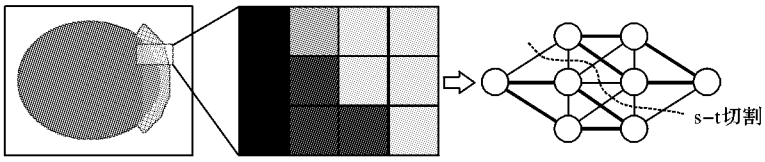
图 3 图像切割区域

②网络权值的确定。相邻节点对应的像素灰度值越相近,同属于目标或背景的可能性就越大,要将其分开而付出的代价就应越高,即对应边的权值越大,反之亦然,这正是 Potts 模型中光滑项 $E_{\mathrm{smooth}}(f)$ 的构造原则。据此,我们对网络边的权值 C_{ij} 作如下构造:

$$C_{ij} = \mathrm{e}^{-\frac{(I_i-I_j)^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

其中:I_i、I_j 为节点 i、j 对应像素的灰度值,σ 为尺度参数,可取图像噪声的标准差。

图 4 为局部待切割图像的网络构造,其中图(b)第 1 列像素为内边界,第 4 列像素为外边界;图(c)为 s-t 网络,其内边界对应网络的源点,外边界对应网络的汇点,边界内像素对应网络的节点,相邻节点以 8 邻域方式连接,边权值大小与边的粗细正相关,虚线为对网络的最小代价切割结果。可以看出,用最小代价原则的最大流/最小割算法对用上述方法构造的网络切割之后,所得切割线能很好地对应目标边界。因此,根据上述过程所构造的网络能被最大流/最小割算法有效切割。



(a) 图像切割区域 (b) 局部待切割图像 (c) 对应s-t网络

图 4 s-t 网络的构造

综上所述,基于图割的目标提取实时修正算法主要实现步骤如下:

步骤 1 输入待提取图像及前期提取的轮廓线;

步骤 2 通过鼠标操作选定修正区域,将已经正确提取

的边界轮廓曲线段向外膨胀一个像素后得到辅助区域,修正区域与辅助区域合并成图像切割区域;

步骤 3　根据上述构造方法,将图像切割区域映射成单源单汇的 s-t 网络;

步骤 4　运用最大流/最小割算法求解 s-t 网络的最小割;

步骤 5　根据 s-t 网络的最小割得到图像切割区域的分割;

步骤 6　输出图像切割区域的分割。

2.3　算法分析

通过上述设计,本文算法能够很好地满足修正算法的基本特性要求:

1)本文算法通过极少的鼠标操作,简单、方便、快捷地实现了修正区域的选定,以极少量的人工操作完成了修正算法所必须的反馈信息输入,达到了"操作简便"的目标。

2)为了实现"快速响应"的要求,本文算法作了两方面的考虑:①采用图割作为算法理论支撑,其最大流/最小割算法能在较低次的多项式时间内快速完成切割;②前期目标提取的局部错误所在区域大多都很小,因此,为了避免大范围甚至整幅图像的切割,本文算法通过选定局部错误所在的修正区域将切割操作限定在极小的范围内,极大地提高了切割效率。

3)"辅助区域"的引入,既确保了对已有正确提取结果的保护,又实现了对修正区域切割得到的曲线段能与已有正确提取的边界曲线段无缝连接,而且还未增加额外的算法时间消耗。

除了满足修正算法的基本特性要求之外,由于本文算法采用最大流/最小割算法完成切割,因而继承了最大流/最小割算法全局最优、抗噪能力强等显著优点,有力地保证本文算法的有效性。

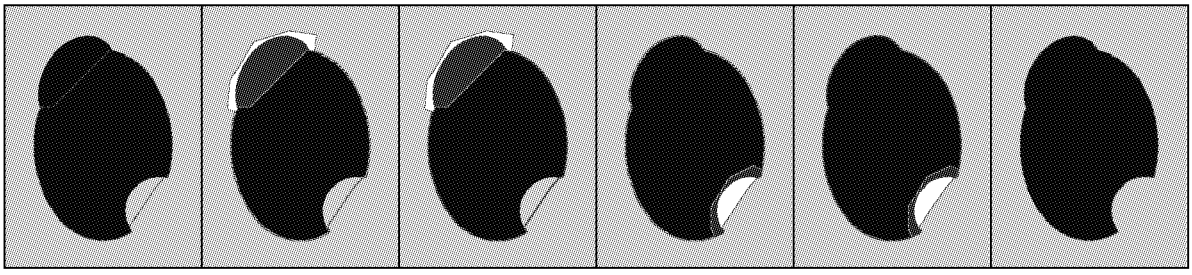
3　实验结果与分析

所用实验平台为:Windows 2003 Standard Edition, Matlab R2008a, CPU: Pentium4 531, RAM: 1 GB,最大流/最小割算法为超额调整预流推进算法,分别选用合成图像、灰度图像及超声图像进行实验分析。

如图 5 所示,前期目标提取算法对一幅大小为 300 × 400 的人工合成图像操作后得到图 5(a)所示轮廓线,该轮廓线分别在目标内部及外部出现两处错误,用本文算法先对目标内部的错误进行修正,耗时 0.079 s,再对目标外部的错误进行修正,耗时 0.037 s。

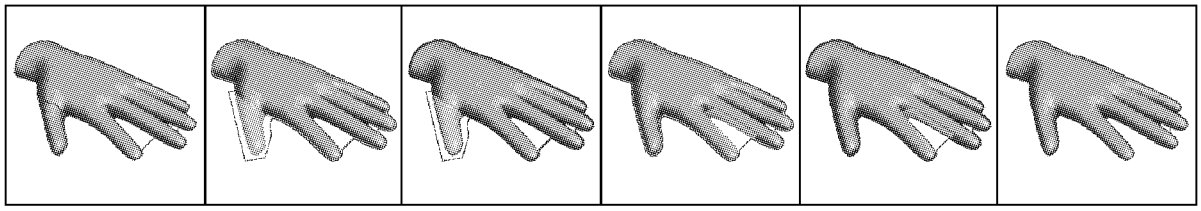
如图 6 所示,灰度图像大小为 265 × 265,前期提取结果如图 6(a)所示,用本文算法先对目标内部的错误进行修正,耗时 0.031 s,再对目标外部的错误进行修正,耗时 0.016 s。

如图 7 所示,选取一幅大小为 256 × 256、带有大量乘性噪声的超声图像进行实验。前期目标提取后得到图 7(a)所示轮廓线,用本文算法对轮廓线上方错误进行修正,最终结果如图 7(d)所示,错误修正消耗时间 0.067 s。



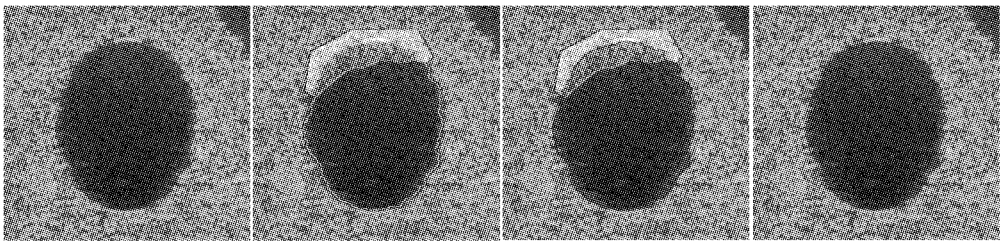
(a)　(b)　(c)　(d)　(e)　(f)

图 5　合成图像的目标提取修正



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)　(f)

图 6　灰度图像的目标提取修正



(a)　(b)　(c)　(d)

图 7　超声图像的目标提取修正

以上述 3 次实验中的 5 次修正为代表,可以看出本文算法有如下特点:1)时间消耗能控制在 0.1 s 以内,当通过鼠标选定修正区域后,能够实时地得到修正的响应结果;2)本文算法能够修正错误分别处于目标内、外的不同类型的错误,且在修正多个错误时不会对已经修正的曲线段重复修正;3)本文算法抗噪能力强,修正精度高,非常适合在对提取精度要求高的医学等领域中进行目标提取的修正。

(下转第 3122 页)

更加准确。

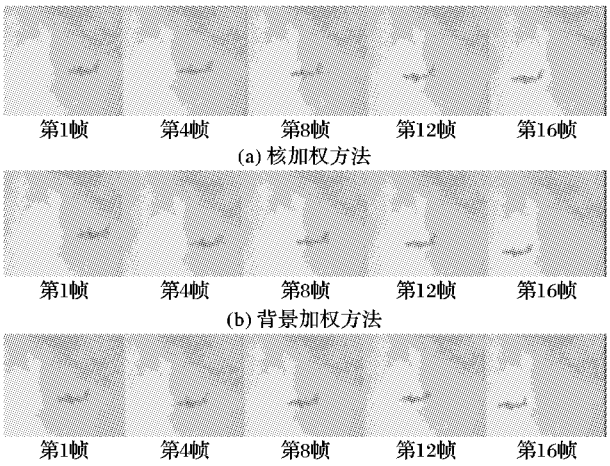


图 3 复杂背景下目标跟踪

4 结语

在研究 Mean-shift 基本算法的基础上，针对其在复杂环境背景以及目标与背景相近的情况下目标定位不准的问题，对传统的模板与候选目标特征选择机制作了改进，即采用背景加权直方图作为目标特征模板，选用 Epanechnikov 核加权直方图作为候选目标直方图，实现了对目标在复杂背景环境下更加准确的跟踪。

参考文献：

[1] COMANICIU D, RAMESH V, MEER P. Real-time tracking of non-rigid objects using mean shift [C]// Proceedings of International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway, USA: IEEE, 2000: 142 – 149.

[2] 张旭光，赵恩良，王延杰. 基于 Mean-shift 的灰度目标跟踪新算法[J]. 光学技术，2007，33(2)：226 – 228.

[3] 江淑红，汪沁，张建秋，等. 基于目标中心距离加权和图像特征识别的跟踪算法[J]. 电子学报，2006，34(7)：1175 – 1180.

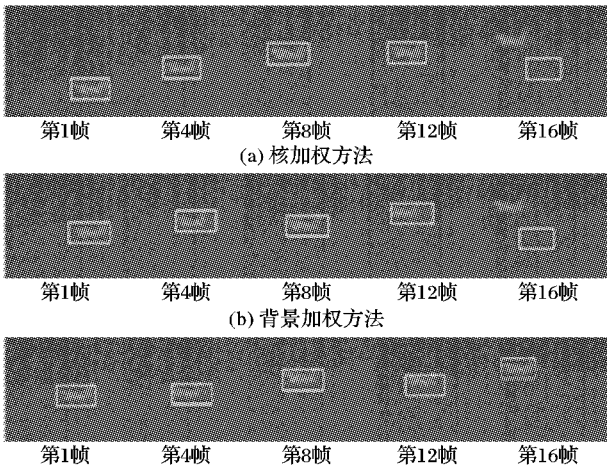


图 4 热象图像目标跟踪

[4] YILMAZ A, SHAFIQUE K, SHAH M. Target tracking in airborne forward looking infrared imagery[J]. Image and Vision Computing Journal, 2003, 21(7): 623 – 635.

[5] COMANICIU D, RAMESH V, MEER P. Kernel-based object tracking [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(5): 564 – 577.

[6] GALLEN J G, XU R Y D, JIN J S. Object tracking using CamShift algorithm and multiple quantized feature spaces [C]// ACM International Conference Proceeding Series 100: Proceedings of the Pan-Sydney Area Workshop on Visual Information Processing. Darlinghurst, Australia: Australian Computer Society, 2003, 100: 3 – 7.

[7] COMANICIU D, RAMESH V, MEER P. Mean shift: A robust approach towards feature space analysis[J]. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(5): 603 – 619.

(上接第 3119 页)

4 结语

目前，基于先验知识和人机交互的半自动目标提取方法已成为目标提取研究领域的主流和热点，但问题的复杂性使得提取方法难以做到对目标的完全正确提取。因此，后期对提取结果进行修正以进一步提高提取精度，是对当前目标提取技术的重要补充与完善。本文基于图割理论，提出了独立于相应提取算法框架的实时修正算法，不仅满足了修正算法的基本特性要求，而且参数少、抗噪能力强，适合于一般的基于轮廓的目标提取。

参考文献：

[1] KASS M, WITKIN A, TERZOPOULOS D. Snakes: Active contour models [J]. International Journal of Computer Vision, 1988, 1(4): 321 – 331.

[2] MUMFORD D, SHAH J. Boundary detection by minimizing functions [C]// Proceedings of Conference Computer Vision and Pattern Recognition. San Francisco: [s. n.], 1985: 41 – 44.

[3] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation [J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79(1): 12 – 49.

[4] BOYKOV Y, JOLLY M P. Interactive graph cuts for optimal boundary and region segmentation of objects in N-D images [C]// Proceedings of Eighth IEEE International Conference on Computer Vision. Washington: IEEE, 2001, I: 105 – 112.

[5] XU N, AHUJA N, BANSAL R. Object segmentation using graph cuts based active contours [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2007, 107(3): 210 – 224.

[6] BOYKOV Y, FUNKA-LEA G. Graph cuts and efficient N-D image segmentation [J]. International Journal of Computer Vision, 2006, 70(2): 109 – 131.

[7] ROTHER C, KOLMOGOROV V, BLAKE A. Grabcut: Interactive foreground extraction using iterated graph cuts [J]// ACM Transactions on Graphics, 2004, 23(3): 309 – 314.

[8] KOLMOGOROV V, CRIMINISI A, BLAKE A, *et al.* Bi-layer segmentation of binocular stereo video [C]// IEEE Computer Society Conference of Computer Vision and Pattern Recognition. Washington: IEEE, 2005, 2: 1186 – 1193.

[9] JUAN O, BOYKOV Y. Active graph cuts [C]// IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Washington: IEEE, 2006, I: 1023 – 1029.

[10] COOK W J, CUNNINGHAM W H, PULLEYBLANK W R, *et al.* Combinatorial optimization [M]. New York: John Wiley & Sons Press, 1998.