

# Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories

## A Quillen model structure on the category of dg categories

Goncalo Tabuada

*Université Paris 7 – Denis Diderot, UMR 7586 du CNRS, Case 7012, 2 place  
Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France*

---

### Abstract

We construct a cofibrantly generated Quillen model structure on the category of small differential graded categories.

### Résumé

Nous construisons une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant sur la catégorie des petites catégories différentielles graduées.

---

### Abridged English version

Let  $k$  be a commutative ring with unit. By a *dg category*, we mean a differential graded  $k$ -category [4] [2]. Let  $\mathbf{DCAT}$  be the category of small dg categories. We remark that it does not have an initial object. Therefore, we consider the category  $\mathbf{DCAT}_{\mathbf{p}}$  of small dg categories that have a distinguished zero object and where the dg functors respect that object. We have a faithful functor  $\mathbf{I}$  from  $\mathbf{DCAT}$  to  $\mathbf{DCAT}_{\mathbf{p}}$  which, to a dg category  $\mathcal{C}$ , associates the dg category  $\mathcal{C}_p$  that is obtained from  $\mathcal{C}$  by adding a zero object  $p$ .

We will introduce a cofibrantly generated Quillen model structure on  $\mathbf{DCAT}_{\mathbf{p}}$  such that the weak equivalences will be the quasi-equivalences [4]. We will use the recognition theorem stated in [3, 2.1.19]. We now introduce the notations

---

*Email address:* [tabuada@math.jussieu.fr](mailto:tabuada@math.jussieu.fr) (Goncalo Tabuada).

<sup>1</sup> Soutenu par FCT-Portugal, bourse SFRH/BD/14035/2003.

needed to define the sets  $I$  (resp.  $J$ ) of generating cofibrations (resp. acyclic generating cofibrations).

Following [2, 3.7.1], we define  $\mathcal{K}$  to be the dg category that has two objects 1, 2 and whose morphisms are generated by  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^0(1, 2)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^0(2, 1)$ ,  $r_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-1}(1, 1)$ ,  $r_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-1}(2, 2)$  and  $r_{12} \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-2}(1, 2)$  subject to the relations  $df = dg = 0$ ,  $dr_1 = gf - 1_1$ ,  $dr_2 = fg - 1_2$  and  $dr_{12} = fr_1 - r_2f$ . Let  $\mathcal{A}$  be the dg category with one object 3, such that  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(3, 3) = k$ . Let  $F$  be the dg functor from  $\mathcal{A}$  to  $\mathcal{K}$  that sends 3 to 1. Let  $\mathcal{B}$  be the dg category with two objects 4 and 5 such that  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(4, 4) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(5, 5) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(4, 5) = 0$  and  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(5, 4) = 0$ . Let  $n \in \mathbb{Z}$ . Let  $S^{n-1}$  be the complex  $k[n-1]$  and let  $D^n$  be the mapping cone on the identity of  $S^{n-1}$ . We denote by  $\mathcal{P}(n)$  the dg category with two objects 6 and 7 such that  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6, 6) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7, 7) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7, 6) = 0$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6, 7) = D^n$  and with composition given by multiplication. Let  $R(n)$  be the dg functor from  $\mathcal{B}$  to  $\mathcal{P}(n)$  that sends 4 to 6 and 5 to 7. Let  $\mathcal{C}(n)$  be the dg category with two objects 8 and 9 such that  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8, 8) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9, 9) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9, 8) = 0$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8, 9) = S^{n-1}$  and composition given by multiplication. Let  $S(n)$  be the dg functor from  $\mathcal{C}(n)$  to  $\mathcal{P}(n)$  that sends 8 to 6, 9 to 7 and  $S^{n-1}$  to  $D^n$  by the identity on  $k$  in degree  $n-1$ . Finally, let  $Q$  be the dg functor, now in  $\mathbf{DCATp}$ , from  $\mathcal{O}$ , which is the initial object in  $\mathbf{DCATp}$ , to  $\mathbf{IA}$ .

**Theorem 0.1** *If we consider for  $\mathcal{C}$  the category  $\mathbf{DCATp}$ , for  $W$  the subcategory of quasi-equivalences, for  $J$  the functors  $\mathbf{IF}$  and  $\mathbf{IR}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , and for  $I$  the functors  $Q$  and  $\mathbf{IS}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , then the conditions of the recognition theorem [3, 2.1.19] are fulfilled. Thus, the category  $\mathbf{DCATp}$  admits a Quillen model structure whose weak equivalences are the quasi-equivalences.*

An analogous result for simplicial categories has been obtained in [1]. Our construction is inspired by [5] and by the construction of  $DG$ -quotients in [2]. One can easily show that for this structure, every object is fibrant.

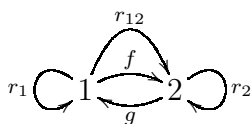
## 1 Préliminaires

Dans toute la suite,  $k$  désigne un anneau commutatif avec 1. Le produit tensoriel  $\otimes$  désigne toujours le produit tensoriel sur  $k$ . Par une *dg-catégorie*, nous entendons une  $k$ -catégorie différentielle graduée, voir [4] [2]. Soit  $\mathbf{DCAT}$  la catégorie des petites dg-catégories (elle ne possède pas d'objet initial) et soit  $\mathbf{DCATp}$  la catégorie des petites dg-catégories qui ont un objet nul spécifié et où les dg-foncteurs préservent cet objet nul. On dispose d'un foncteur fidèle  $\mathbf{I}$  de la catégorie  $\mathbf{DCAT}$  vers  $\mathbf{DCATp}$  qui, à une dg-catégorie  $\mathcal{C}$ , associe la dg-catégorie  $\mathcal{C}p$  qui s'obtient à partir de  $\mathcal{C}$  en rajoutant un objet nul  $p$ . Pour les catégories de modèles de Quillen, nous renvoyons à [3]. On introduira une

structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant dans  $\mathbf{DCATp}$  dont les équivalences faibles sont les quasi-équivalences [4]. Pour cela, on se servira du théorème 2.1.19 de [3].

## 2 Théorème principal

Suivant [2, 3.7.1], nous définissons  $\mathcal{K}$  comme la dg-catégorie avec deux objets 1, 2 et dont les morphismes sont engendrés par  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^0(1, 2)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^0(2, 1)$ ,  $r_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-1}(1, 1)$ ,  $r_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-1}(2, 2)$  et  $r_{12} \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-2}(1, 2)$  soumis aux relations  $df = dg = 0$ ,  $dr_1 = gf - 1_1$ ,  $dr_2 = fg - 1_2$  et  $dr_{12} = fr_1 - r_2f$ .



Soit  $\mathcal{A}$  la dg-catégorie avec un seul objet 3 et telle que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(3, 3) = k$ . Soit  $F$  le dg-foncteur de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{K}$  qui envoie 3 sur 1. Soit  $\mathcal{B}$  la dg-catégorie avec deux objets 4 et 5 telle que  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(4, 4) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(5, 5) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(4, 5) = 0$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(5, 4) = 0$ . Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . On note  $S^{n-1}$  le complexe  $k[n-1]$  et  $D^n$  le cône sur le morphisme identique de  $S^{n-1}$ . On note  $\mathcal{P}(n)$  la dg-catégorie avec deux objets 6 et 7 et telle que  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6, 6) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7, 7) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7, 6) = 0$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6, 7) = D^n$ . Soit  $R(n)$  le dg-foncteur de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{P}(n)$  qui envoie 4 sur 6 et 5 sur 7. On considère la dg-catégorie  $\mathcal{C}(n)$  avec deux objets 8 et 9 telle que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8, 8) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9, 9) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9, 8) = 0$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8, 9) = S^{n-1}$ . Soit  $S(n)$  le dg-foncteur de  $\mathcal{C}(n)$  vers  $\mathcal{P}(n)$  qui envoie 8 sur 6, 9 sur 7 et  $S^{n-1}$  dans  $D^n$  par l'identité sur  $k$  en degré  $n-1$ . Soit finalement  $Q$  le dg-foncteur, maintenant dans  $\mathbf{DCATp}$ , de la catégorie  $\mathcal{O}$ , qui est l'objet initial dans  $\mathbf{DCATp}$ , vers  $\mathbf{IA}$ .

**Théorème 2.1** *Si on considère pour catégorie  $\mathcal{C}$  la catégorie  $\mathbf{DCATp}$ , pour classe  $W$  la sous-catégorie de  $\mathbf{DCATp}$  des quasi-équivalences, pour classe  $J$  les dg-foncteurs  $\mathbf{IF}$  et  $\mathbf{IR}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , et pour classe  $I$  les dg-foncteurs  $Q$  et  $\mathbf{IS}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , alors les conditions du théorème [3, 2.1.19] sont satisfaites.*

*Remarque 1* Un résultat analogue pour les catégories simpliciales a été obtenu dans [1]. Notre construction est inspirée par [5] et par la construction des dg-quotients dans [2]. On peut montrer aisément que pour la structure obtenue, tout objet est fibrant.

On observe facilement que les conditions (i), (ii) et (iii) sont vérifiées.

**Lemme 2.2** *On a  $J\text{-cell} \subseteq W$ .*

Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Soit  $T : \mathbf{IB} \rightarrow \mathcal{J}$  un morphisme quelconque dans  $\mathbf{DCATp}$ . On considère la somme amalgamée suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{IB} & \xrightarrow{T} & \mathcal{J} \\ \mathbf{IR}(n) \downarrow & & \downarrow \text{inc} \\ \mathbf{IP}(n) & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array}$$

dans  $\mathbf{DCATp}$ . Il s'agit de vérifier que  $\text{inc}$  est une quasi-équivalence. La catégorie  $\mathcal{U}$  s'obtient à partir de la catégorie  $\mathcal{J}$  en rajoutant un nouveau morphisme  $j$  de  $T(4)$  vers  $T(5)$  de degré  $n - 1$  et un nouveau morphisme  $l$  de  $T(4)$  vers  $T(5)$  de degré  $n$  tels que  $dl = j$ . Pour des objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{J}$ , on a donc une décomposition de  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Y)$  en somme directe de complexes

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Y) = \bigoplus_{m \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{U}}^{(m)}(X, Y)$$

avec

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}^{(m)}(X, Y) = \underbrace{(T(5), Y) \otimes D^n \otimes (T(5), T(4)) \otimes D^n \otimes \cdots \otimes D^n \otimes (X, T(4))}_{m \text{ facteurs } D^n},$$

où l'on écrit  $(,)$  pour  $\text{Hom}_{\mathcal{J}}(,)$ . Puisque le complexe  $D^n$  est contractile, l'inclusion

$$\text{Hom}_{\mathcal{J}}(X, Y) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Y)$$

est un quasi-isomorphisme. Comme le dg-foncteur d'inclusion est l'identité au niveau des objets, c'est une quasi-équivalence. Soit maintenant  $N : \mathbf{IA} \rightarrow \mathcal{L}$  un morphisme quelconque dans  $\mathbf{DCATp}$ . On considère la somme amalgamée suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{IA} & \xrightarrow{N} & \mathcal{L} \\ \mathbf{IF} \downarrow & & \downarrow \text{inc} \\ \mathbf{IK} & \longrightarrow & \mathcal{M} \end{array}$$

dans  $\mathbf{DCATp}$ . Il s'agit de montrer que  $\text{inc}$  est une quasi-équivalence. La catégorie  $\mathcal{M}$  s'obtient à partir de la catégorie  $\mathcal{L}$  en rajoutant la catégorie  $\mathcal{K}$  à  $\mathcal{L}$  en identifiant les objets  $N(3)$  et  $\mathbf{IF}(3)$ . Soit  $\mathcal{L}_0$  la catégorie  $\mathcal{L}$  à laquelle on rajoute un morphisme  $s$  de  $N(3)$  vers un nouvel objet  $H$ . Notons  $\text{Mod}\mathcal{L}_0$  la catégorie des dg-modules (à droite) sur  $\mathcal{L}_0$ . On considère le plongement de Yoneda

$$\mathcal{L}_0 \hookrightarrow \text{Mod}\mathcal{L}_0, \quad X \mapsto \widehat{X}.$$

Soit  $\mathcal{L}_1$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}\mathcal{L}_0$  dont les objets sont le cône  $C$  sur  $\widehat{s}$  et les foncteurs représentables. Soit  $\mathcal{L}_2$  la catégorie obtenue en rajoutant dans  $\mathcal{L}_1$  un morphisme  $h$  de degré 1 à l'anneau d'endomorphismes de  $C$  tel que  $dh$  est égal à l'identité de  $C$ . Notre catégorie  $\mathcal{M}$  s'identifie naturellement à la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{L}_2$  dont les objets sont les images dans  $\mathcal{L}_2$  des objets de  $\mathcal{L}_0$ . Soient  $X$  et  $Y$  des objets de  $\mathcal{L}$ . On a alors une décomposition

de  $k$ -modules graduées

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}^{(n)}(\widehat{X}, \widehat{Y}),$$

où

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}^{(n)}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(C, \widehat{Y}) \otimes S^2 \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(C, C) \otimes S^2 \otimes \cdots \otimes S^2 \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(\widehat{X}, C)}_{n \text{ facteurs } S^2}.$$

Mais dans cette situation, on n'a pas une somme directe de complexes. Soit  $g_{n+1} \cdot h \cdot g_n \cdot h \cdots h \cdot g_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}^{(n)}(\widehat{X}, \widehat{Y})$ . Comme on a  $dh = 1$ , l'image par  $d$  de cet élément est égale à

$$d(g_{n+1}) \cdot h \cdot g_n \cdot h \cdots h \cdot g_1 + \underbrace{(-1)^{|g_{n+1}|} \cdot g_{n+1} \cdot 1 \cdot g_n \cdot h \cdots h \cdot g_1}_{(n-1) \text{ facteurs } h} + \cdots .$$

On remarque que, pour tout  $m \geq 0$ , la somme

$$\bigoplus_{n \geq 0}^m \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}^{(n)}(\widehat{X}, \widehat{Y})$$

est un sous-complexe de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X}, \widehat{Y})$  et on dispose donc d'une filtration exhaustive de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X}, \widehat{Y})$ . Le  $n$ -ième sous-quotient s'identifie à  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}^{(n)}(\widehat{X}, \widehat{Y})$  et comme le complexe  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(\widehat{X}, C)$  est contractile l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(X, Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X}, \widehat{Y})$$

est un quasi-isomorphisme. Comme  $s$  devient un isomorphisme dans  $H^0(\mathcal{M})$  et que le foncteur d'inclusion est l'identité au niveau des objets, il est bien une quasi-équivalence.

Démontrons maintenant que  $J - \mathrm{inj} \cap W = I - \mathrm{inj}$ . Pour cela, on considère la classe **Surj** formée des foncteurs  $G : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{I}$  dans **DCATp** qui vérifient :  $G$  induit une surjection de l'ensemble des objets de  $\mathcal{H}$  sur l'ensemble des objets de  $\mathcal{I}$  et  $G$  induit des quasi-isomorphismes surjectifs dans les complexes de morphismes.

**Lemme 2.3** *On a  $I - \mathrm{inj} = \mathbf{Surj}$ .*

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie quelconque et  $\mathcal{V}$  une classe quelconque de morphismes dans  $\mathcal{C}$ . On note  $\mathcal{V} - \mathrm{drt}$  la classe de morphismes qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{V}$ . La classe  $Q - \mathrm{drt}$  est formée des foncteurs qui sont surjectifs au niveau des objets. La classe **IS**( $n$ ) -  $\mathrm{drt}$  est formée des foncteurs qui sont des quasi-isomorphismes surjectifs au niveau des complexes

de morphismes. En effet, un carré commutatif dans  $\mathbf{DCATp}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{IC}(n) & \xrightarrow{D} & \mathcal{H} \\ \mathbf{IS}(n) \downarrow & & \downarrow G \\ \mathbf{IP}(n) & \xrightarrow{E} & \mathcal{I} \end{array}$$

correspond à la donnée d'un carré commutatif dans la catégorie des complexes

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{D} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(D(8), D(9)) \\ i_n \downarrow & & \downarrow G \\ D^n & \xrightarrow{E} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(E(6), E(7)) \end{array}$$

où  $D(8)$  et  $D(9)$  sont des objets quelconques dans  $\mathcal{H}$ . La propriété résulte de la caractérisation des quasi-isomorphismes surjectifs dans la catégorie des complexes sur  $k$ . Voir [3, 2.3.5].

**Lemme 2.4** *On a  $J - inj \cap W = \mathbf{Surj}$ .*

Montrons l'inclusion  $\supseteq$ . Soit  $H$  un foncteur de  $\mathcal{N}$  vers  $\mathcal{E}$  dans la classe  $\mathbf{Surj}$ . Comme  $H$  est surjectif au niveau des objets et un quasi-isomorphisme au niveau des complexes de morphismes, on a  $H \in W$ .

La classe  $R(n) - \mathrm{drt}$  est formée des foncteurs surjectifs aux niveau des complexes de morphismes. Il suffit donc de montrer que  $H \in \mathbf{IF} - \mathrm{drt}$ . La donnée d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{IA} & \xrightarrow{P} & \mathcal{N} \\ \mathbf{IF} \downarrow & & \downarrow H \\ \mathbf{IK} & \xrightarrow{U} & \mathcal{E} \end{array}$$

correspond à la donnée de la partie inférieure gauche du diagramme

$$\begin{array}{ccc} P(3) & \xrightarrow{\overline{U(f)}} & D \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ U(1) & \xrightarrow{U(f)} & U(2) \end{array}$$

et à la donnée d'une contraction  $h$  du cône  $C_1$  de  $\widehat{U(f)}$  dans  $\widehat{\mathcal{E}}$ . Comme  $H$  est surjectif au niveau des objets, il existe  $D \in \mathcal{N}$  telle que  $H(D) = U(2)$ . Le foncteur  $H$  est un quasi-isomorphisme surjectif au niveau des complexes de morphismes. Donc on peut relever  $U(f)$  en  $\overline{U(f)}$ . Dans les catégories des

dg-modules respectives, on obtient le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 \widehat{P(3)} & \xrightarrow{\widehat{U(f)}} & \widehat{D} & \longrightarrow & C_2 \curvearrowright_{h^*} \\
 \widehat{H} \downarrow & & \downarrow \widehat{H} & & \downarrow \widehat{H} \\
 \widehat{U(1)} & \xrightarrow{\widehat{U(f)}} & \widehat{U(2)} & \longrightarrow & C_1 \curvearrowright_h
 \end{array}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  désignent les cônes sur les morphismes respectifs et  $h$  est la contraction de  $C_1$ . Comme  $H$  et donc  $\widehat{H}$  induisent des quasi-isomorphismes surjectifs dans les algèbres d'endomorphismes, on peut relever  $h$  en une contraction  $h^*$  de  $C_2$  par application du lemme [3, 2.3.5] au couple  $(h, 1)$ .

Montrons maintenant l'inclusion  $\subseteq$ . Soit  $L$  un foncteur de  $\mathcal{D}$  vers  $\mathcal{S}$  qui appartient à  $J - \text{inj} \cap W$ . La classe  $R(n) - \text{drt}$  est formée des foncteurs surjectifs au niveau des complexes de morphismes. Comme  $L \in W$ , il suffit de montrer que  $L$  est surjectif au niveau des objets. Soit  $E \in \mathcal{S}$  un objet quelconque. Comme  $L \in W$ , il existe  $C \in \mathcal{D}$  et un morphisme  $q \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(L(C), E)$  qui devient un isomorphisme dans  $H^0(\mathcal{S})$

$$\begin{array}{ccc}
 C & & \\
 L \downarrow & & \\
 L(C) & \xrightarrow{q} & E.
 \end{array}$$

Ainsi,  $q$  est l'image de  $f$  par un foncteur de  $\mathbf{I}(\mathcal{K})$  vers  $\mathcal{S}$ . Comme on a  $L \in J - \text{inj}$ , on peut relever le morphisme  $q$  et par conséquent l'objet  $E$ . Le foncteur  $L$  est donc bien surjectif au niveau des objets.

Nous avons vérifié que  $J - \text{cell} \subseteq W$  (lemme 2.2) et que  $I - \text{inj}$  est égal à  $J - \text{inj} \cap W$  (lemmes 2.3 et 2.4). Ces conditions impliquent celles du théorème de Hovey [3, 2.1.19].

## Remerciements

Je tiens à remercier B. Keller pour des conversations utiles.

## Références

- [1] Julia Bergner, *A model category structure on the category of simplicial categories*, math.AT/0406507
- [2] V. Drinfeld, *DG quotients of DG categories*, J. Alg. **272** (2004), 643–691.
- [3] Mark Hovey, *Model Categories*, Mathematical Surveys and Monographs **63**, AMS, Providence, RI, 1999.

- [4] B. Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **27** (1994), 63–102.
- [5] C. Rezk, *A note on a certain model category structure on the category of categories*, available at [www.math.uiuc.edu/~rezk](http://www.math.uiuc.edu/~rezk).