地 質 論 評
第17卷 第2期 1957年4月

http://www.geojournals.cn/georev/ch/index.aspx

關于樣品縮分的理論問題

何 澤 慶
(長春地質勘探学院)

目 次

一、 引言
二、 對理想簡單情況的討論
三、 一般樣品縮分的理論
四、 一般理論和特殊理論的比較
五、 一般結論對特殊情況的應用
六、 最小縮分量和顆粒直徑的關係問題

一、 引 言

本文主要是从或然率的理論出發,研究一般樣品的縮分問題。由于文献缺乏,因此無法了解过去对这問題研究的確切情况。 但根据有關參考書及書后的文献目錄知,过去曾有人从理論方面來研究砂礦樣品的縮分問題[1),2)],但是關于一般樣品縮分問題的著作則完全沒有。从現有的參考書來看,可知通常是用实驗的方法來研究这問題的,并力圖得到一些經驗性的公式[3)]。根据这些估計,一般樣品的縮分問題,从理論上來說,还是一個沒有解决的問題,本文主要的內容也正在这方面。

二、 對理想簡單情況的討論

在处理一般的複雜問題之前討論一個最簡單的理想情况。假定有一大堆樣品, 由兩類大小相同性質不同的礦石塊所組成。 在这堆樣品中, 一類所佔的比率爲 p_1, 另一類爲 p_2, 顯然我們有如下的公式

$$p_1 + p_2 = 1. \tag{1}$$

今自堆中任取 n 顆,假定得到第一類的顆數爲 n_1, 第二類爲 n_2,

$$n_1 + n_2 = n,$$

顯然 n_1 和 n_2 不是一定的,都是或然量,其或然率如下式所示

$$p = c_n^{n_1} p_1^{n_1} p_2^{n_2}, \tag{2}$$

1) Новиков В. А., О необходимом весе проб при опробовании россыпей на редкие минералы "Разв. недр" № 2—3, 1940.

2) Ли А. Ф., Методика сокращения шлиховых проб "Разв. недр" № 1, 1948.

3) 如 Г. О. Чечотт 的公式見 Г. Д. Ажгирей 等著的"礦產普查勘探方法"。

其中

$$c_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!},$$

n_1 和 n_2 雖然是或然量，它們都有一個理論平均值，这平均值应按下式計算

$$\bar{n}_1 = \sum_{n_1=0}^{n} n_1 c_n^{n_1} p_1^{n_1} p_2^{n_2}. \tag{3}$$

爲將这個式子算出來，我們利用牛頓的二項式展開式，得

$$\Sigma c_n^{n_1} p_1^{n_1} p_2^{n_2} = (p_1 + p_2)^n. \tag{4}$$

將上式对 p_1 微分后再乘以 p_1，得

$$\Sigma n_1 c_n^{n_1} p_1^{n_1} p_2^{n_2} = np_1(p_1 + p_2)^{n-1}. \tag{5}$$

因此根据(1)、(3)兩式得

$$\bar{n}_1 = np_1,$$

用 n_{01} 代表这個值，即

$$n_{01} = \bar{n}_1 = np_1. \tag{6}$$

用同樣的方法可得

$$n_{02} = \bar{n}_2 = np_2, \tag{6'}$$

顯然

$$n_{01} + n_{02} = n(p_1 + p_2) = n. \tag{7}$$

現令 Δ 代表实際數和理論平均數的差，即

$$\Delta = n_1 - n_{01} = n_{02} - n_2. \tag{8}$$

則顯然 Δ 的理論平均值应爲零，因爲

$$\bar{\Delta} = \overline{(n_1 - n_{01})} = \bar{n}_1 - n_{01} = 0.$$

但是 Δ 平方的平均值是不等于零的，而且这平均值正是代表了在取標本時由于任意性而引起的偏差。下面我們就來計算这值。首先由(8)式知

$$\Delta^2 = (n_1 - n_{01})^2 = n_1^2 - 2n_1 n_{01} + n_{01}^2,$$

故

$$\bar{\Delta}^2 = \overline{n_1^2} - 2\bar{n}_1 n_{01} + n_{01}^2 =$$
$$= \overline{n_1^2} - n_{01}^2. \tag{9}$$

爲求 $\overline{n_1^2}$，將(5)式对 p_1 再微分一遍，乘以 p_1 后得

$$\Sigma n_1^2 c_n^{n_1} p_1^{n_1} p_2^{n_2} = np_1(p_1 + p_2)^{n-1} + n(n-1)p_1^2(p_1 + p_2)^{n-2},$$

上式左边正是 $\overline{n_1^2}$，考慮到(1)、(6)兩式得

$$\overline{n_1^2} = np_1 + n(n-1)\,p_1^2 =$$
$$= n_{01} + n_{01}^2 - n_{01}p_1. \tag{10}$$

將(10)式代入(9)式得

$$\bar{\Delta}^2 = n_{01}(1-p_1) = np_1(1-p_1) = \\ = np_1p_2. \tag{11}$$

爲研究縮分过程中品位的變化，假定第一類顆粒的含礦品位爲 k_1 第二類爲 k_2，則縮分前的平均品位是

$$k_0 = p_1k_1 + p_2k_2 = \\ = \frac{n_{01}k_1 + n_{02}k_2}{n}, \tag{12}$$

从大堆中取出 n 顆的平均品位是

$$k = \frac{n_1k_1 + n_2k_2}{n}, \tag{13}$$

因此品位的誤差是

$$\delta k = k - k_0 = \frac{1}{n}\Big\{k_1(n_1 - n_{01}) + k_2(n_2 - n_{02})\Big\}.$$

由(8)式得

$$\delta k = \frac{(k_1 - k_2)}{n}\,\Delta,$$

利用(11)式可得品位的均方誤差

$$\overline{\delta k^2} = \frac{(k_1-k_2)^2}{n^2}\,\bar{\Delta}^2 = \\ = \frac{(k_1-k_2)^2}{n^2}\,np_1p_2 = \frac{(k_1-k_2)^2}{n}\,p_1(1-p_1). \tag{14}$$

將(14)式中的 n 解出，并令 ε^2 代表品位均方誤差率，即

$$\varepsilon^2 = \frac{\overline{\delta k^2}}{k_0^2},$$

則

$$n = \frac{(k_1-k_2)^2}{\varepsilon^2 k_0^2}\,p_1(1-p_1). \tag{15}$$

若顆粒的直徑爲 D，平均密度爲 ρ，最小縮分重量爲 Q，則

$$Q = n\frac{\pi}{6}D^3\rho = \\ = \frac{\pi\rho}{6\varepsilon^2k_0^2}(k_1-k_2)^2p_1(1-p_1)D^3.$$

若用 ε_u 代表極大誤差(超过此值的或然率爲 5%)，則

$$\varepsilon_u = 2\varepsilon,$$

因而

$$Q = \frac{2\pi\rho}{3\varepsilon_u^2 k_0^2}(k_1 - k_2)^2 p_1(1 - p_1)D^3. \tag{16}$$

这就是在最簡單情况下最小縮分量和最大誤差之間的關係。顯然很容易把这結果应用到砂礦樣品的問題上去，这時可以認爲

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = 0,$$

于是由(12)式知

$$k_0 = p_1,$$

因而(16)式變爲

$$Q = \frac{2\pi}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_u^2}\frac{1 - k_0}{k_0}D^3. \tag{17}$$

当有用礦物的品位較低時，k_0 很小，故用上式可簡化爲

$$Q = \frac{2\rho D^3}{\varepsilon_u^2 k_0}. \tag{18}$$

在 C.G.S. 單位制中，Q 是克，D 是厘米，ρ 是克/毫升，k_0 是体積品位(即礦石顆粒的体積在總体積中所佔的比率)。若用重量品位 k_u，顯然

$$k_u = \frac{\rho_K}{\rho}k_0,$$

因而(18)式變爲

$$Q = \frac{2\rho_K D^3}{\varepsilon_u^2 k_u}. \tag{19}$$

其中 ρ_K 代表礦石的密度。

三、 一般樣品縮分的理論

上面我們討論了顆粒大小相同，品位只有兩种的特殊情况，現在我們進而討論当各顆粒大小不同品位不同時的一般情况。 在研究这問題時，我們暫假定全堆樣品可按其大小和品位之不同而分爲 S 類，同類的大小品位全同， 不同類的則大小品位可以不同。(顯然这個假定是相当適合于一般情况的，因爲对 S 并沒有任何限制， 在必要時甚至可以取每一個顆粒当作一類，但实際上有時是不必要的，因爲这樣， 雖然从理論上說較爲完善，結果却使所得的結論無法应用。) 現分別用 $v_1, v_2, \cdots, v_s$ 代表各類顆粒單個的体積； $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 爲品位(以后不特別声明，均指体積品位)； $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 是在原始樣品堆中， 各類顆粒數目在總顆粒數中所佔的比例； $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 爲各類在總体積中所佔的比率。 現在的問題是从这樣一堆樣品中取出一定量的顆粒來， 品位的誤差如何。由于現在情况比上節中所討論的複雜得多，因此假如我們仍像以前一樣，一次取出 N

顆粒，而后研究各种組合的或然率，会是極端困难的。由于这個原因，我們下面采取另一种理想的办法來討論。

假定有 S 個盒子，其中分別盛着 S 類顆粒。現自各盒子中各取一次，假定能取到顆粒的或然率是 $p_1, p_2, \cdots, p_s$，而取不到的則是 $(1-p_1), (1-p_2), \cdots, (1-p_s)$，由于

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = 1,$$

因此能取到顆粒的或然率是 1，亦即可能取到一個顆粒。假定我們一共取了 n 遍，則可能得到大約 n 個顆粒。顯然当取的遍數極多因此 n 極大時，所得顆粒中各類所佔的比率，將接近于能自各盒中取得顆粒的或然率，即 $p_1, p_2, \cdots, p_s$。由此可知，用这樣的办法縮分是能够得到合理的結果的。下面我們進一步討論用这种方法縮分的誤差。

假定用 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 代表取 n 次所得各類的顆粒數，顯然品位爲

$$k = \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i v_i k_i}{\sum_j n_j v_j}. \tag{20}$$

現令

$$n_{0i} = np_i, \tag{21}$$

$$\Delta_i = n_i - n_{0i}, \tag{22}$$

則

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{s} (n_{0i} + \Delta_i) v_i k_i}{\sum_{j=1}^{s} (n_{0j} + \Delta_j) v_j}. \tag{23}$$

將 k 对 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s$ 展開

$$k = k_{\Delta=0} + \sum_{i=1}^{s} \left.\frac{\partial k}{\partial \Delta_i}\right|_{\Delta=0} \Delta_i + \varepsilon(\Delta^2), \tag{24}$$

其中 $\varepsilon(\Delta^2)$ 代表一個次數高于二的諸 Δ_i 的函數，利用(23)式可得

$$\frac{\partial k}{\partial \Delta_i} = \frac{v_i k_i}{\sum_{j=1}^{s} (n_{0j} + \Delta_j) v_j} - \frac{[\Sigma (n_{0j} + \Delta_j) v_j k_j]}{[\Sigma (n_{0j} + \Delta_j) v_j]^2} v_i, \tag{25}$$

令

$$k_{\Delta=0} = k_0,$$

$$\Sigma n_{0i} v_i = V, \tag{26}$$

則由(25)式可得

$$\left.\frac{\partial k}{\partial \Delta_i}\right|_{\Delta=0} = \frac{v_i}{V}(k_i - k_0).$$

代入(24)式,忽略 $\varepsilon(\Delta^2)$,得

$$\delta k = k - k_0 =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{(k_i - k_0)}{V} v_i \Delta_i ,$$

因此 δk 的均方值爲

$$\overline{\delta k^2} = \overline{\left[\sum \frac{(k_i - k_0)}{V} v_i \Delta_i \right]^2}. \tag{27}$$

爲計算这個值,我們注意到不同的 Δ 是無關的或然量,因此有

$$\overline{\Delta_i \Delta_j = 0}, \qquad (i \neq j)$$

根据这個關係我們有

$$\overline{\delta k^2} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(k_i - k_0)^2}{V^2} v_i^2 \overline{\Delta}_i^2. \tag{28}$$

顯然,用和第二節中相似的方法,可以得到对于諸 Δ_i 和(11)式相当的公式

$$\overline{\Delta}_i^2 = np_i(1 - p_i), \tag{29}$$

代入(28)式得

$$\overline{\delta k^2} = \sum_{i} \frac{(k_i - k_0)^2}{V^2} v_i^2 np_i(1 - p_i). \tag{30}$$

爲作進一步的簡化我們注意到 P_i 和 p_i 有如下的關係

$$P_i = \frac{p_i v_i}{\sum_{j=1}^{s} p_j v_j} = \frac{np_i v_i}{\Sigma n_{0j} v_j} = \frac{np_i v_i}{V}, \tag{31}$$

將(31)式代入(30)式得

$$\overline{\delta k^2} = \sum_{i} \frac{(k_i - k_0)^2}{V} v_i P_i (1 - p_i). \tag{32}$$

假定我們把類分得很細,因而每一類的顆粒數和總數比均很小,即每一個 p_i 均近于零,則上式變爲

$$\overline{\delta k^2} = \frac{1}{V} \sum_{i} (k_i - k_0)^2 v_i P_i, \tag{33}$$

若用 ε_u (品位的極大誤差率,等于 2ε)來表示,用 ρ 代表平均密度,則縮分量的公式成爲

$$Q = \frac{4\rho}{\varepsilon_u^2 k_0^2} \sum_{i} (k_i - k_0)^2 v_i P_i. \tag{34}$$

四、 一般理論和特殊理論的比較

(33)、(34)兩個公式是假定在類分得很多,因此各 p_i 變爲很小時而得到的;但是

从这兩個公式本身看來，我們把相近的類歸并起來，公式并不發生任何改變，由此可見(33)、(34)這兩公式对于類分得不太細也同樣可以適用。但是当類分得不多時，(33)、(34)兩式顯然和(30)、(32)兩式不一致。这個矛盾是值得注意的。

本來類分得多和少是人爲的，沒有客观意義，但是在我們的問題中，却產生了差别。这個差别只能用如下的方法來解釋：類分得多和少，我們盛不同類顆粒的盒子也就多少不同。根据上面所說到的公式(32)与(33)、(34)之間矛盾可知，盒子多少对研究縮分誤差問題是有關係的。但是由这馬上可以想到，既然盒子多少对結果有關，那麽用第三節中所述方法所得的結論是否可能得到正確的結論，是值得懷疑的，因爲一般的縮分方法和这方法是相差很遠的。由于这個原因，把第三節中所得的結果和第二節中的結果進行比較是有意義的，因爲第二節中所采取的縮分方法和常用的縮分方法一致，因此其結論是可靠的。

爲了進行这种比較，可以令 $S = 2$, $v_1 = v_2$, 于是(30)式就變爲

$$\overline{\delta k^2} = \frac{(k_1 - k_0)^2}{V^2} v_1^2 n p_1(1 - p_1) + \frac{(k_2 - k_0)^2}{V^2} v_2^2 n p_2(1 - p_2),$$

顯然

$$\frac{V}{v_1} = \frac{V}{v_2} = n,$$

$$p_2 = (1 - p_1),$$

$$(1 - p_2) = p_1,$$

故上式可改寫爲

$$\overline{\delta k^2} = \frac{(k_1 - k_0)^2 + (k_2 - k_0)^2}{n} p_1(1 - p_1). \tag{35}$$

把(35)式与(14)式比較，由于

$$(k_1 - k_2)^2 = [(k_1 - k_0) - (k_2 - k_0)]^2 =$$

$$= (k_1 - k_0)^2 + (k_2 - k_0)^2 + 2(k_1 - k_0)(k_0 - k_2),$$

而上式中最后一項必爲正，故知

$$(k_1 - k_2)^2 > (k_1 - k_0)^2 + (k_2 - k_0)^2.$$

这表示(30)式或(32)式確实是不正確的，顯然这一不正確之所以發生是因爲我們所采用的縮分的方法与实際情况不符合。

現更進一步研究(33)式，顯然当 $S = 2$, $v_1 = v_2$ 時，(33)式變爲

$$\overline{\delta k^2} = \frac{1}{N}[(k_1 - k_0)^2 P_1 + (k_2 - k_0)^2 P_2], \tag{36}$$

当 $v_1 = v_2$ 時，$p_1 = P_1$, $p_2 = P_2$, 同時根据(12)式可得

$$k_1 - k_0 = k_1(1 - p_1) - p_2 k_2 =$$

$$= p_2(k_1 - k_2).$$

同理可得

$$k_2 - k_0 = p_1(k_2 - k_1),$$

將这些結果代入(36)式,考慮到 $p_1 + p_2 = 1$, 可得

$$\overline{\delta k^2} = \frac{1}{N}[(k_1 - k_2)^2 p_2^2 p_1 + (k_2 - k_1)^2 p_1^2 p_2] =$$

$$= \frac{1}{N}(k_1 - k_2)^2 p_1 p_2, \tag{37}$$

顯然(37)式恰好和(14)式一致。

根据上述的比較,可以看到,当我們把類分得愈來愈細時,盒子会愈來愈多的,我們的方法所得的結論,恰好愈接近于眞实的情况。事实上假如把每一個顆粒当作一類,結果全部盒子總合在一起也就變成了不分類,于是分類的方法和不分類的方法就一致了,因此他們的結論当然也应該一致,这說明(37)式和(14)式之一致,并非偶然, 这同樣也証明了(33)与(34)兩公式是完全可靠的。

五、 一般結論對特殊情况的應用

公式(34)雖然包括了一切情况, 但使用起來是不方便的。根据这公式很难处理具体的問題,因此在本節中我們將討論一些比較特殊的情况,在这些特殊情况下公式變得更簡單,因此也就便于理解和应用。

我們首先假定樣品顆粒,按品位說基本上可分爲兩類,一類品位爲 k_a, 一類品位爲 k_b, 它們在整堆樣品中所佔的比率分别爲 P_a 和 P_b, 則

$$k_0 = P_a k_a + P_b k_b,$$

$$k_a - k_0 = k_a(1 - P_a) - P_b k_b =$$

$$= P_b(k_a - k_b),$$

$$k_b - k_0 = P_a(k_b - k_a),$$

$$\sum_a P_i = P_a,$$

$$\sum_b P_i = P_b,$$

$$\bar{v}_a = \frac{\sum_a v_i P_i}{P_a},$$

$$\bar{v}_b = \frac{\sum_b v_i P_i}{P_b}.$$

其中 $\sum_a$ 和 $\sum_b$ 分别代表对品位爲 k_a 和 k_b 的樣品相加, $\bar{v}_a$ 和 $\bar{v}_b$ 分别代表兩類顆粒

的平均体積，將上述这些公式代入(34)式得

$$Q = \frac{4\rho}{\varepsilon_u^2}\frac{(k_a - k_b)^2(P_b\bar{v}_a + P_a\bar{v}_b)}{k_0^2}P_aP_b. \tag{38}$$

根据这個公式可以明顯的看到，樣品縮分量和顆粒体積之間的關係，並不是像一般文獻上所談的那樣，主要是被顆粒的最大體積所决定，而是被顆粒的平均体積所决定。不僅如此，假若兩類顆粒中有一類顆粒所佔的比率特別小，那麼樣品的最小縮分量主要也就被另一類顆粒的平均体積所决定。

以砂礦爲例，这時一類顆粒是完全不含礦的砂，一類是全部爲礦的礦砂，因而可令

$$k_a = 0, \quad k_b = 1,$$

假定礦砂的品位極低，則

$$P_b \doteq 0, \quad P_a \doteq 1,$$

于是(38)式變爲

$$Q = \frac{4\rho}{\varepsilon_u^2}\frac{\bar{v}_b}{k_0}. \tag{39}$$

亦即縮分量只和礦砂的平均体積成比例，而和不含礦顆粒的大小無關。

另一方面假定砂礦的品位極高，則

$$P_b \doteq 1, \quad P_a \doteq 0,$$

則(38)式變爲

$$Q = \frac{4\rho}{\varepsilon_u^2}\bar{v}_aP_a. \tag{40}$$

从上面的兩种特殊情况可以看到 Q 都只和平均体積有關。

現考慮另一种特殊情况，即假定顆粒可按大小分爲數類，各類的体積分別用 v_α, v_β, …, v_τ 代表，則(34)式變爲

$$Q = \frac{4\rho}{\varepsilon_u^2k_0^2}\sum_\alpha v_\alpha\left[\sum_{i_\alpha=1}^{S_\alpha}P_{i\alpha}(k_{i\alpha} - k_0)^2\right].$$

假定各种大小顆粒的平均品位都是 k_0，并用 ε_α^2 代表体積爲 v_α 的顆粒的品位偏差的均方值，即

$$\varepsilon_\alpha^2 = \sum_{i_\alpha=1}^{S_\alpha}\frac{P_{i\alpha}(k_{i\alpha} - k_0)^2}{k_0^2P_\alpha}, \tag{41}$$

其中

$$P_\alpha = \sum_{i_\alpha=1}^{S_\alpha}P_{i\alpha},$$

則

$$Q = \frac{4\rho}{\varepsilon_u^2}\sum v_aP_a\varepsilon_a^2. \tag{42}$$

若各種不同体積顆粒的品位偏差率均方值基本上相等，即

$$\varepsilon_\alpha^2 = \varepsilon_\beta^2 = \cdots\cdots = \varepsilon_\tau^2.$$

用 ε_0^2 代表，則(42)式變爲

$$Q = 4\rho \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_u^2} \bar{v}_0, \tag{43}$$

其中 $\bar{v}_0$ 是平均体積，即

$$\bar{v}_0 = \sum_a P_a v_a.$$

若不用極大縮分率誤差 ε_u，而用縮分均方誤差率 $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_u$，由于 $Q = \rho V$，其中 V 和以前一樣是總体積，則(43)式可改寫爲

$$V\varepsilon^2 = \bar{v}_0\varepsilon_0^2. \tag{44}$$

从这個公式可以明顯的看到，最小縮分体積仍然只和顆粒的平均体積成比例。从这個公式还可以清楚地看到縮分体積和顆粒品位的不均勻性的關係，事实上 ε_0^2 就代表这樣的數量，它可以用和一般確定品位變化係數相似的方法來定。例如我們从樣品中仍取 m 塊，大致地確定其品位分別爲 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，則 ε_0^2 可按下式計算

$$\varepsilon_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(k_i - k)^2}{(m-1)}\left[\frac{m}{\sum_i k_i}\right]^2. \tag{45}$$

六、 最小縮分量和顆粒直徑的關係問題

在上面的討論中，除了第二節外，我們始終是用顆粒的体積。當顆粒的大小基本上相同時，从顆粒体積得到顆粒直徑是一件極簡單的事，但若顆粒大小不同，那麼要將(38)、(39)、(42)、(44)等公式中的平均体積代之以直徑是一件比較困难的事，在这种情况下我們仍需采用一种平均的直徑，但是这個平均是比較困难的，是一种三次方的平均，事实上若直接使用平均体積也許更爲方便些。

除此之外既然最小縮分量和顆粒的体積成比例，那麼当然就和直徑 D 的三次方成比例，这看起來也許覺得和已有的結果矛盾。例如根据实驗的結果 Чечотт 提出了和 D^2 成比例的說法，而更仔細的实驗則認爲和 D 的 1.5—2.7 次方成比例。这個矛盾实際上是容易解决的，因爲当我們把樣品打碎時，不僅每個顆粒的体積按 D 的三次方變化，同時各顆粒的品位也在變化，因此(42)等公式中和 k 有關的項目即 ε_0^2 也在發生變化。而且很容易可以証明，当 D 減小時 ε_0^2 在增大，由于这個原因，所以最小縮分量隨 D 的變化較三次方爲慢，要准確的定出最小縮分量和 D 的關係，从理論方面來研究，应該从確定 ε_0^2 和 D 的關係入手。