模糊预后验决策

唐 献 万威武

（西安交通大学经济管理系，710049）

The Method of Fuzzy Preposterior Decision

Tang Xian　Wan Weiwu

（Xi' an Jiaotong Universsty，710049）

Abstract In this artical, fuzzy theory and the mothod of preposterior decision of Bayes decision are jointed to set up a new decision model. It would help us deal with somw decision problems which contain ambiguity or fuzzy factors, in a more scientific and reasonable way. Because this type of decision problem is more similar to actual ones, the method of fuzzy preposterior decision could adapt to much more decision problems.

摘　要 本文旨在把模糊数学方法同贝叶斯决策中的预后验决策方法相结合，提供了一个处理这类决策中出现的一些模糊性的方法。这种方法适用范围更广，更接近日常生活中遇到的决策问题。

引　言

假如决策者可以在决策之前获得某些样本信息，就可以减少决策的不确定性。但是，为了获得这些信息，决策者必须付出一定的代价。这种有关付出多大代价来购买足够的样本信息的决策称为预后验决策[1]。

传统的预后验决策建立在确定状态的前提下，它假定已知的状态具有确定的概率（先验概率），然后根据这些状态和备选方案构成的收益表用概率统计的方法进行决策。可是在实际情况中，人们很难对未来做准确的估计，这种方法本身就包含了一定的不合理因素，所得出的结论可靠性较差。

本文将要讨论的模糊预后验决策方法是对传统的确定性的预后验决策方法的一种改进和完善。模糊预后验决策实际上包含了这样一种模糊性，即未来状态出现的可能性，以模糊概率的形式给出，或者说决策者面临的未来状态是模糊的。这实际是对传统预后验决策方法的前提条件作了一定程度的放宽，这样就可以使预后验决策的方法适用于更多的决策情况。

模糊预后验决策原理

设状态空间为 Ω，其输出为 ω，ω 出现的概率是 $P(\omega)$。又设 $\underset{\sim}{A}$ 是 Ω 上的模糊事件，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(\omega)$ 表示 ω 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属程度，则 $\underset{\sim}{A}$ 可记为 $\underset{\sim}{A}=\int_{\Omega}\mu_{\underset{\sim}{A}}(\omega)/\omega$，它对应的状态称为模糊状态。模糊事件出现的概率可根据模糊率计算公式求得，并以之作为先验概率用于模糊预后验决策。

本文于 1993 年 3 月 13 日收到。

设允许决策空间为D，则Ω和D的积空间Ω×D为收益（损失）空间，以R表示。R也是用于传统预后决策的收益（损失）空间，因为一般情况下，确定的未来状态对应的收益（损失）才是确定的，模糊的未来状态对应的只不过是收益（损失）的某种组合形式。

假设在预后验决策中，状态空间Ω上有n个输出ω_i，i=1，2，3，…，n，又有m个模糊事件（模糊状态）$\underset{\sim}{A}_i$，i=1，2，3，…，m。决策空间D上有l个输出，对应着l个待定方案，记为d_i，i=1，2，3，…，l。状态空间和决策空间构成收益空间，其元素记为e（$d_i|\omega_j$），表示状态ω_j下决策d_i带来的收益。

在进行决策之前，这些数据还不够，或者说还不能直接用于决策。主要问题在于两个方面：一是对应模糊事件的概率，二是模糊事件和方案构成的模糊收益。

模糊事件的概率根据模糊数学的知识易于求得[2]。设模糊事件$\underset{\sim}{A}=\mu_{\underset{\sim}{A}}(\omega_1)/\omega_2+\mu_{\underset{\sim}{A}}(\omega_2)/\omega_2+\cdots+\mu_{\underset{\sim}{A}}(\omega_k)/\omega_k$，且已知P（$\omega_1$），P（$\omega_2$），…，P（$\omega_k$）的值，则：

$$P(\underset{\sim}{A})=\sum_{j=1}^{k}\mu_{\underset{\sim}{A}}(\omega_j)P(\omega_j)$$

进而可以求得模糊收益E（$d_i|\underset{\sim}{A}$）：

$$E(d_i|\underset{\sim}{A})=(\sum_{j=1}^{k}e(d_i/\omega_j)\mu_{\underset{\sim}{A}}(\omega_j)P(\omega_j))/P(\underset{\sim}{A})$$

其中，i=1，2，3，…，l。从数学上看，模糊收益是一个确定值，但由于考虑了隶属度和模糊概率，它实质上已包含有一定的模糊因素在内。模糊收益从本质上讲是一个均值概念，它是对应于某模糊事件的收益在某方案约束下的均值。在对原始数据进行了这两方面的处理之后，我们就得到了一个模糊预后验决策所需的收益表以及模糊状态的先验概率，这样决策便可以进行了。

假定现在什么附加信息都没有，如何决策呢？正如在传统预后验决策中所做的那样，仍然根据期望收益最大这一准则来决策。对某一方案d_k，它对应的期望收益是：

$$E(d_k)=\sum_{i=1}^{m}E(d_k|\underset{\sim}{A}_i)P(\underset{\sim}{A}_i)$$

期望收益最大的方案就是最优方案。这里的期望收益虽然是确定的，但它如同模糊收益一样，具有模糊的因素。因此以下把这种期望收益均称为期望模糊收益，以区别于传统预后验决策和模糊收益表中的模糊收益。

假如可以得到完全信息，明确未来将肯定出现哪种状态，就会使决策者减少承担的风险。但决策者在决策前并不知道具体的未来状态是哪种，因而存在一个付出代价购买这个信息是否值得的问题。传统预后验决策用期望完全信息价值（EVPI）与购买信息的代价比较的结果来判断[1]。在模糊情况下，也是类似的，只不过是使用带有模糊信息的期望模糊完全信息价值（EFVPI）表示。它用下式计算：

$$EFVPI=\sum_{j=1}^{m}P(\underset{\sim}{A}_j)\cdot\max_{i=1}[E(d_i|\underset{\sim}{A}_j)-E(d^*|\underset{\sim}{A}_j)]$$

d^*是最优方案。如果EFVPI大于要付出的代价，就购买完全信息，反之则不能购买。

假定得不到完全信息，只能得到样本信息，那么决策者必须知道样本的各种情况。抽样的次数越多，出现的情况也越复杂。为简便起见，这里只讨论抽样一次的情况。抽样一次得到的可能情况是状态空间的所有可能输出，但其确定的值又必然改变先验概率，故必须考虑抽样输出每种情况带来的新先验概率对决策的影响，并汇总它们用以判断是否购买样本信息。类似于传统预后验决策，这里采用期望模糊样本信息价值（EFVPI）作为比较标准。当EFVSI大于购买样本信息的代价时，就购买信息，否则不宜购买。EFVSI的计算公式如下：

$$EFVSI=\sum_{j=1}^{n}P'(\underset{\sim}{A}_j)E'(d^*|\underset{\sim}{A}_j)-E(d^*)$$

其中$P'(\underset{\sim}{A}_j)$是状态$\underset{\sim}{A}_j$的后验概率，$E'(d^*|\underset{\sim}{A}_j)$是抽样出现状态$\underset{\sim}{A}_j$的最优决策期望模糊收益，E（$d^*$）是抽样前最优决策的期望模糊收益。

以上的讨论是对收益空间进行的，损失空间的结论也类似。通过一般原理的阐述，可以清楚地知道模糊预后验决策的步骤。

实证分析

某单位计划兴建某项目，共有三种方案。项目投产后，市场需求可能有六种情况。有关的原始数据详见表 1。

表 1　原始数据

市场需求（单位）	0	100	200	300	400	500
先验概率	0.1	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1
收益（万元）/方案						
方案 1	−100	0	100	200	300	350
方案 2	−150	−50	50	200	350	450
方案 3	−200	−100	0	100	400	500

该单位经过市场调查发现市场需求的具体数量难以准确预测，因此采用模糊预后验方法进行决策。根据经验，有关人员提出了三种模糊状态及其模糊集形式：

市场需求量小：　1/0 + 0.9/100 + 0.1/200

市场需求量中等：0.1/100 + 0.9/200 + 0.9/300 + 0.1/400

市场需求量大：　0.1/300 + 0.9/400 + 1/500

决策人员重新计算模糊状态的先验概率，并调整了收益表（见表 2）。

P(市场需求量小) = 0.1 × 1 + 0.1 × 9 + 0.2 × 0.1 = 0.21

P(市场需求量中等) = 0.1 × 0.1 + 0.2 × 0.9 + 0.3 × 0.9 + 0.2 × 0.1 = 0.48

P(市场需求量大) = 0.3 × 0.1 + 0.2 × 0.9 + 0.1 × 1 = 0.31

表 2　调整后数据

模糊状态	市场需求量小	市场需求量中等	市场需求量大
先验概率	0.21	0.48	0.31
模糊收益（万元）/方案			
方案 1	−38	162	306
方案 2	−88	144	367
方案 3	−138	70	403

假定无任何附加信息，可以根据期望模糊收益最大准则作出决策：

方案 1：期望模糊收益 = − 38 × 0.21 + 162 × 0.48 + 306 × 0.31 = 164.64（万元）

方案 2：期望模糊收益 = − 88 × 0.21 + 144 × 0.48 + 367 × 0.31 = 164.41（万元）

方案 3：期望模糊收益 = − 138 × 0.21 + 70 × 0.48 + 403 × 0.31 = 129.55（万元）

故应选择方案 1。而这时：

$$EFVPI=(-38+38)\times 0.21+(-162-162)\times 0.48+(403-306)\times 0.31=30.07(\text{万元})$$

如果完全信息的价值低于这个数值，就可以购买完全信息。

假如该单位准备同某咨询机构咨询未来市场需求状态，但必须支付报酬。有关这个咨询机构的历史咨询资料见表 3。

表 3　历史咨询资料

次数 / 预测情况 / 实际情况	市场需求量小	市场需求量中等	市场需求量大
市场需求量小	90	5	0
市场需求量中等	10	40	5
市场需求量大	0	5	45

根据表 3 和贝叶斯后验概率公式可以求得后验概率（过程从略）：

P(市场需求量小) = 0.237

P(市场需求量中等) = 0.436

P(市场需求量大) = 0.327

因而可以得到各种预测情况下的最优决策及其对应的最大期望模糊收益值：

市场需求量小：方案 1 最佳，期望模糊收益为 2 万元

市场需求量中等：方案 1 最佳，期望模糊收益为 162.08 万元

市场需求量大：方案 3 最佳，期望模糊收益为 353.05 万元

所以可以求出期望模糊样本信息价值：

$$EFVSI=2\times 0.237+162.08\times 0.436+353.05\times 0.327-164.64=21.95(\text{万元})$$

如果咨询费大于这个数字，就不宜咨询。

结　论

模糊预后验决策是对传统预后验决策的推广和补充，它适用范围更广，结论的合理性更强；另一方面，模糊预后验决策的计算并不复杂，与传统方法相比，只增加了调整数据的过程。在一般情况下，还可以减少因确定状态过多带来的计算复杂程度，值得推广应用。

参考文献

(1)　言茂松．贝叶斯风险决策工程．清华大学出版社，1989.

(2)　张　跃．模糊数学方法及其应用．煤炭工业出版社，1992.

(3)　王铭文等．模糊数学讲义．华北师范大学出版社，1988。