推广的 C^1 封闭引理的较简证明

麦 结 华

(广西大学数学系，南宁)

设M是 $n+1$ 维 C^2 流形 ($n\geqslant 1$)，$\sigma: M\to TM$ 是M上的一个 C^1 向量场，$\varphi: \mathscr{D}\to M$ 是σ 产生的流. 仿照文献 [1]，我们不限定M是紧致的. 因此，φ的定义域 $\mathscr{D}$ 可以不是整个的 $M\times R$ 而仅是 $M\times R$ 的一个连通开子集. 设 $v_0\in M$，当如下两条成立时，称 v_0 是 φ的一个非游荡点: (i) $\{v_0\}\times R^+\subset\mathscr{D}$ ($R^+=[0,\infty)$); (ii) 对 v_0 在M中的任一个邻域 U，总存在 $y\in U$ 及 $t>1$ 使得 $\{y\}\times[0,t]\subset\mathscr{D}$ 且 $\varphi_t(y)\equiv\varphi(y,t)\in U$. 显然，我们在此所给的定义是通常的动力系统中的非游荡点的定义(见文献 [2] p.47) 的形式上的推广，它实际上等价于文献 [1] p.1 中的定义. 限于本文的目的,我们不妨假定 v_0 既非奇点，也非周期点.

对任 $t\in$ 闭集 $T\subset R^+$ 及上述 v_0，记 $v_t=\varphi_t(v_0)$，$v_T=\{v_t: t\in T\}$. 若存在某一正数 c 使得T的每一个连通分支的长度均大于 c，且T的勒贝格测度为无穷，则称 T (或 v_T) 为 R^+ (或 v_{R^+}) 的 c 正则子集.

定理 1 设 v_0 是M上的 C^1 向量场σ 所产生的流 φ 的非游荡点，T是 R^+ 的 c 正则子集，W是M中包含 v_T 的任一开集,则对任 $\varepsilon>0$ 均存在M上的一个 C^1 向量场 σ' 满足: (i)在 M-W上 σ' 与σ 恒等; (ii) 范数 $|\sigma'-\sigma|_1<\varepsilon$; (iii) v_0 是 σ' 所产生的流 φ' 的周期点.

显然，定理 1 隐含了推广的 C^1 封闭引理[1,3,4]. 因定理 1 涉及到 M 上的向量场空间 $\Gamma^1(M)$[2,p.213] 上的 C^1 范数 $\|\ \|_1$，而 C^1 范数的定义又与关于切丛 $\pi: TM\to M$ 的范数图集的选取有关(参看文献 [2] pp. 226—234)，为明确起见，在证明定理 1 之前我们有必要先选定 $\Gamma^1(M)$ 上的一个范数图集. 为此需首先取定M的一个 C^2 图集 $A=\{\xi_i: i\in Z'\}$ 如下:

(A.1) 对任 $i\in Z'$,ξ_i 是从M的某一开子集 U_i 到 R^{n+1} 的一个开子集 U'_i 的同胚,且 ξ_i 是M的另一个容许的图表[2,p.201]$\eta_i: V_i\to V'_i$ 在 U_i 上的限制，U_i 有紧致的闭包 $\bar{U}_i\subset V_i$;

(A.2) 对M的任一紧致子集 K,$\{i: U_i\cap K\neq\varnothing\}$ 是有限集;

(A.3) 存在含于T的 c' 正则子集 T' (某 $c'>0$) 和 $v_{T'}$ 在M中的邻域 W'，以及正常数 $\beta\geqslant 2$ 使得: (i) 对任 i 和 $j\in Z'$ 及 $x\in U_i\cap U_j\cap W'$, 坐标变换映射 $\xi_{ij}=\xi_j\xi_i^{-1}: \xi_i(U_i\cap U_j)\to \xi_j(U_i\cap U_j)$ 在点 x 处的 Jacobi 矩阵的范数(按文献 [5] § 3 的定义) $\left\|\dfrac{\partial\xi_{ij}(x)}{\partial x}\right\|<\beta$; (ii) 对 $v_{T'}$ 的每一个连通分支L均有一个 $i=i(L)\in Z'$ 使得 $L\subset U_i$，且对任 $z\in\xi_i(U_i\cap W')$ 均有 $\left\|\dfrac{\partial\sigma_i^0(z)}{\partial z}\right\|<\beta$,对任 $t\in R$，当 $\varphi_i^0(\{z\}\times J_t)\subset\xi_i(U_i\cap W')$ 时有 $\left\|\dfrac{\partial\varphi_i^0(z,t)}{\partial(z,t)}\right\|<\beta$,在此 $\sigma_i^0: U'_i\to R^{n+1}$ (或 (id,σ_i^0): $U'_i\to U'_i\times R^{n+1}$) 是$\sigma$ 在图表 ξ_i 上的局部代表[2,p.234]，φ_i^0 是流 φ 在 ξ_i 上的局部代表，即 φ_i^0 是 U'_i 上由 σ_i^0 产生的流，$J_t=[0,t]$ 或 $[t,0]$.

本文 1986 年 5 月 3 日收到.

以上三个条件之中，前两个条件是在定义 $\Gamma^1(M)$ 上的范数时所选的M上的任一个图集均必须满足的．当 v_T 有ω极限点时(这包括M紧致，或闭包 $\bar{v}_{R^+}$ 紧致等情形)，条件 (A.3) 亦可由 (A.1) 及 (A.2) 自动推出，此时可以令 $v_{T'}$ 含于 v_T 的任一个ω极限点的紧致邻域之中．当 v_T 无ω极限点时，条件 (A.3) 亦可实现，例如，此时我们可以取 T' 使得它的每一个连通分支 L 均是个长度为 c 的闭区间，并且可以取图集 $A=\{\xi_i:U_i\to U'_i\}$ 使得 $v_{T'}$ 的每一个分支 L 均有一个邻域 W_L 只与一个图域 $U_{i(L)}$ 相交，同时取 $\beta=2$．

当满足上述三个条件的图集A选定之后，$\Gamma^1(M)$ 上的范数图集 $\mathscr{A}=\{\tilde{\xi}_i:i\in Z'\}$ 即可由A确定，其中 $\tilde{\xi}_i$ 是从 $\tilde{U}_i=\pi^{-1}(U_i)$ 到 $U'_i\times R^{n+1}$ 的同胚．由 $\mathscr{A}$ 可得到 $\Gamma^1(M)$ 上的一个范数 $\|\ \|_1=\|\ \|_{\mathscr{A},1}$．有关的定义可参看文献[2] pp.208,234．下面开始定理 1 的证明．

证　令 T' 及 c' 如条件 (A.3) 所述．若 $c'<6$，我们可以通过向量场 $\frac{c'}{6}\sigma$ 去研究 σ．故下面不妨设 $c'\geqslant 6$．取实数序列 $t_0=0$, t_1, t_2, $\cdots$使得 $t_i>t_{i-1}+6$ 且 $[t_i-3,\ t_i+3]\subset T'$, $(i\geqslant 1)$．对 $j\geqslant 0$，取定 $k_j\in Z'$ 使得 $v_{T'}$ 中含 v_{t_j} 的连通分支含于 U_{k_j} 之中 (但 $j=0$ 时仅要求 $v_0\in U_{k_0}$)．为着记号上的方便，不妨设 $k_j\equiv j$．另外，我们不妨假定 $u_j\equiv\xi_j(v_{t_j})$ 是 R^{n+1} 中的原点，且 $\sigma_j^0(u_j)=(0,\cdots,0,b_j)\in R^{n+1}$ (某 $b_j>0$)．把 $R^n=R^n\times\{0\}$ 看作 R^{n+1} 的子空间．记 $I_3=[-3,3]$．以 $B^n(v,r)$ 表示 R^n 中以 v 为心，以 r 为半径的闭实心球．取 $\delta_{i0}\in(0,1]$ 使得 (i) $\mathscr{G}_{i0}\equiv B_{i0}\times I_3(\subset U'_i\times R)$ 含于流 φ_i^0 的定义域，其中 $B_{i0}\equiv B^n(u_i,\delta_{i0})\subset U'_i$; (ii) φ_i^0 限制在 $\mathscr{G}_{i0}$ 上时是个从 $\mathscr{G}_{i0}$ 到 $G_{i0}\equiv\varphi_i^0(\mathscr{G}_{i0})(\subset U'_i)$ 的 C^1 同胚; (iii) $\xi_i^{-1}(G_{i0})\subset W'\cap W$．作 C^1 投射 p_i: $G_{i0}\to B_{i0}$ 为 p_i 把 φ_i^0 在 G_{i0} 中的每一根轨线段投影到它与 B_{i0} 的交点．取 $\delta_{i1}\in(0,1]$ 使得: (i) $V_i\equiv B^n(u_0,\delta_{i1})\subset U'_0$;(ii)$\mathscr{D}_{0i}\equiv\xi_0^{-1}(V_i)\times[-\delta_{i1},t_i+4]\subset\mathscr{D}$，且 $\varphi|\mathscr{D}_{0i}$ 是从 $\mathscr{D}_{0i}$ 到 $\varphi(\mathscr{D}_{0i})$ 的 C^1 同胚; (iii) $\varphi_{t_i}\xi_0^{-1}(V_i)\subset\xi_i^{-1}(G_{i0})$．令 $\phi_i=p_i\xi_i\varphi_{t_i}\xi_0^{-1}|V_i$，则 ϕ_i 是从 V_i 到 $\phi_i(V_i)\subset B_{i0}$ 的 C^1 同胚．设 ϕ_i 在原点 u_0 处的 Jacobi 方阵为 $\mathscr{T}_i$，对应于 $\mathscr{T}_i$ 的线性变换为 $f_i:R^n\to R^n$．取 $\delta_{i2}\in(0,\delta_{i0}]$ 使得 $B_{i2}\equiv B^n(u_i,\delta_{i2})\subset\phi_i(V_i)\cap f_i(V_i)$．对任 $\delta\in(0,\delta_{i2}]$，令 $B_{i\delta}=B_i(\delta)=B^n(u_i,\delta)$, $\mathscr{G}_{i\delta}=B_{i\delta}\times I_3(\subset U'_i\times R)$, $G_{i\delta}=\varphi_i^0(\mathscr{G}_{i\delta})$．设函数 g 及 $g_1:R\to[0,1]$ 如文献 [5] § 3 所定义．作映射 $h_{i\delta}$: $G_{i\delta}\to R^{n+}$ 为

$$h_{i\delta}(z)=z+g_1(t)g\left(\frac{3}{2}-\frac{2|\tilde{y}-u_i|^2}{\delta^2}\right)[\varphi_i^0(\tilde{y},t)-z],\tag{1}$$

其中 $z\equiv z_{iyt}=\varphi_i^0(y,t)$, $\tilde{y}=f_i\phi_i^{-1}(y)$, $(\forall y\in B_{i\delta},\ t\in I_3)$．与文献 [5] § 3 相似，通过演算不难验证存在 $\delta_{i3}\in(0,\delta_{i2}]$ 使得当 $\delta\in(0,\delta_{i3}]$ 时 $h_{i\delta}$ 是从 $G_{i\delta}$ 到自身的同胚．此时，在 $G_{i\delta}$ 上存在着由

$$\varphi_{i\delta}^{(1)}(h_{i\delta}(y),t)=h_{i\delta}\varphi_i^0(y,t),\ (\forall y\in B_{i\delta},\ t\in I_3)\tag{2}$$

决定的与 $\varphi_i^0|_{G_{i\delta}}$ 拓扑等价的流 $\varphi_{i\delta}^{(1)}$．据 (1) 和 (2) 式容易算出 $\varphi_{i\delta}^{(1)}$ 的速度向量场 $\sigma_{i\delta}^{(1)}$，并进而算出 $\sigma_{i\delta}^{(1)}-\sigma_{i\delta}^0$ 及其 Jacobi 方阵 $\dfrac{\partial(\sigma_{i\delta}^{(1)}-\sigma_{i\delta}^0)(z)}{\partial z}$ 的表达式，$(\sigma_{i\delta}^0\equiv\sigma_i^0|_{G_{i\delta}})$，从而得出

$$\lim_{\delta\to 0}|\sigma_{i\delta}^{(1)}-\sigma_{i\delta}^0|_1=0.\tag{3}$$

现在令 $\mathscr{F}=(f_1,f_2,\cdots)$．取$N$为大于 $\dfrac{40000n^5\beta^6}{\varepsilon}$ 的一个整数．设由 $\mathscr{F}$ 及 N 决定的正整数 μ 及正数 ρ 如文献 [5] 的定理 1.1 所述．令 $Z''=\left\{j\in Z':U_j\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\mu}U_i\right)\neq\varnothing\right\}$，则$Z''$

是有限集．据上述性质(A.1)及(A.2)知存在正常数γ使得对任j及$k\in Z''$，坐标变换映射ξ_{jk}在任一点$z\in\xi_j(U_j\cap U_k)$处的每一个一阶及二阶偏微商的绝对值均小于γ．对此γ及任j，$k\in Z''$，以及M上的任一个C^1向量场σ^*，设σ^*在图表$\xi_j|_{U_j\cap U_k}$及$\xi_k|_{U_j\cap U_k}$上的局部代表分别是σ_{jk}^*与σ_{kj}^*，容易证明

$$|\sigma_{kj}^*|_1\leqslant 16n^3\gamma^2|\sigma_{jk}^*|_1. \tag{4}$$

取$\delta_{i4}\in(0,\delta_{i3}]$使得当$\delta\in(0,\delta_{i4}]$时在区域$G_{i\delta}$上有

$$|\sigma_{i\delta}^{(1)}-\sigma_{i\delta}^0|_1<\frac{\varepsilon}{48n^3\gamma^2}. \tag{5}$$

又取$\delta_0\in(0,\min\{\delta_{11},\delta_{21},\cdots,\delta_{\mu1}\}]$使得$\psi_i(B_0)\subset B_{i\delta_4}(1\leqslant i\leqslant\mu)$，其中$B_0\equiv B^n(u_0,\delta_0)$．令$\mathscr{D}_0=\xi_0^{-1}(B_0)\times[-\delta_0,t_\mu+4]$，显然$\mathscr{D}_0\subset\mathscr{D}$且$\varphi|_{\mathscr{D}_0}$是个$C^1$同胚．取$\delta_{i5}\in(0,\delta_{i4}]$使得$B_{i\delta_{i5}}\subset\psi_i(B_0)$，且对任$z$及$w\in G_{i\delta_{i5}}$，当$|z-w|<\delta_{i5}$时有

$$\left\|\frac{\partial\sigma_i^0(z)}{\partial z}-\frac{\partial\sigma_i^0(w)}{\partial w}\right\|+\left\|\frac{\partial\sigma_i^0(z)}{\partial z}\cdot\sigma_i^0(z)-\frac{\partial\sigma_i^0(w)}{\partial w}\cdot\sigma_i^0(w)\right\|<\frac{\varepsilon}{4000n^5\beta^3}.$$

作U_i'上的向量场$\sigma_i^{(1)}:U_i'\to R^{n+1}$为

$$\sigma_i^{(1)}(z)=\begin{cases}\sigma_{i\delta_{i5}}^{(1)}(z), & 若\ z\in G_{i\delta_{i5}};\\ \sigma_i^0(z), & 若\ z\in U_i'-G_{i\delta_{i5}}.\end{cases}$$

又作M上的向量场$\sigma^{(1)}$使得$\sigma^{(1)}$限制在$M-U_1-U_2-\cdots-U_\mu$上时与σ相等，且$\sigma^{(1)}$在ξ_i上的局部代表是$\sigma_i^{(1)}$．据(5)式、(4)式及$\Gamma^1(M)$上的C^1范数的定义[2,p.234]知

$$|\sigma^{(1)}-\sigma|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

设$\varphi^{(1)}$是M上由$\sigma^{(1)}$产生的流．取$\delta_1\in(0,\delta_0]$使得$B_1\equiv B^n(u_0,\delta_1)\subset\bigcap_{i=1}^{\mu}f_i^{-1}\left(B_i\left(\frac{\delta_{i5}}{2}\right)\right)$，因$\varphi^{(1)}$在图表$\xi_i|_{\xi_i^{-1}(G_{i\delta_{i5}})}$上的局部代表是$\varphi_{i\delta_{i5}}^{(1)}$，由(1)、(2)式知从任一点$x\in\xi_0^{-1}(B_1)$发出的$\varphi^{(1)}$的流线将依次经过点$\xi_i^{-1}f_i\xi_0(x)$，$(i=1,\cdots,\mu)$．

令$\delta_2=\dfrac{\varepsilon_0\delta_1}{3N+3\rho}$，其中$\varepsilon_0$是$(0,1]$中的一个任意选定的数.记$B_2=B^n\left(u_0,\dfrac{\delta_2}{2}\right)$，因$v_0$仍是流$\varphi^{(1)}$的非游荡点，故存在$\varphi^{(1)}$的一段轨线$L$使得它的两个端点$y_1$及$y_2$含于$\xi_0^{-1}(B_2)$中，且$L\cap\xi_0^{-1}(B_2)$仅含此两点．令$X_0=\xi_0(L\cap\xi_0^{-1}(B_1))$．取$\{w_1,w_2\}\subset X_0$以及$\mathring{B}^n(y_1,\rho\delta_2)$中的点列$x_1=w_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_{\mu-1}$，$x_\mu=w_2$如文献[5]的定理1.1所述． 记$Y_0=\partial B^n(y_1,\rho\delta_2)\cup X_0-\{w_1,w_2\}$，$x_{ki}=f_i(x_k)$，$Y_i=f_i(Y_0)$，$r_i=d(Y_i,x_{ii})$，则对$1\leqslant i<\mu$有$|x_{i+1,i}-x_{ii}|\leqslant\dfrac{r_i}{N}$．作$G_i^*\equiv\varphi_i^{(1)}\left(B_i\left(\dfrac{\delta_{i5}}{2}\right)\times I_3\right)$上的自同胚$H_i$为

$$H_i(z)=z+g\left(1-\frac{|y-x_{ii}|^2}{r_i^2}\right)g(t)[\varphi_i^{(1)}(x_{i+1,i},t)-\varphi_i^{(1)}(x_{ii},t)],$$

其中$z=\varphi_i^{(1)}(y,t)$，$\left(\forall y\in B_i\left(\dfrac{\delta_{i5}}{2}\right),\ t\in I_3\right)$．令$\varphi_i^{(2)}$是$G_i^*$上由

$$\varphi_i^{(2)}(H_i(y),t)=H_i\varphi_i^{(1)}(y,t),\ \left(\forall y\in B_i\left(\frac{\delta_{i5}}{2}\right),\ t\in I_3\right)$$

决定的与$\varphi_i^{(1)}$等价的流．设$\sigma_i^{(2)}$是G_i^*上流$\varphi_i^{(2)}$的速度向量场．作M上的向量场$\sigma^{(2)}$使得，限

制在 $M-\bigcup_{i=1}^{\mu}\xi_i^{-1}(G_i^*)$ 上时 $\sigma^{(2)}=\sigma^{(1)}$，且在图表 $\xi_i|_{\xi_i^{-1}(G_i^*)}$ 上 $\sigma^{(2)}$ 以 $\sigma_i^{(2)}$ 为局部代表（$i=1,\cdots,\mu$）. 令 $\varphi^{(2)}$ 为由 $\sigma^{(2)}$ 产生的流。与文献[5] § 3 相似，$\varphi^{(2)}$ 含有经过 w_1 的周期轨道. 不难算出，在 G_i^* 上有 $|\sigma_i^{(2)}-\sigma_i^{(1)}|_1<\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{48n^2\beta^2}$ $(i=1,\cdots,\mu)$，从而推出 $|\sigma^{(2)}-\sigma^{(1)}|_1<\frac{\varepsilon}{3}$. 最后，只要前面提到的 $\varepsilon_0\in(0,1]$ 取的足够小（ε_0 可由 $\sigma|_{U_0}$ 及 A 中覆盖 v_0 的那些图表事先决定），我们便显然可以在点 v_0 的邻域内对 $\sigma^{(2)}$ 作一个小于 $\frac{\varepsilon}{3}$ 的 C^1 挠动 $\sigma'-\sigma^{(2)}$，将原来 $\sigma^{(2)}$ 中过 w_1 的周期轨道挪动为 σ' 中过 v_0 的周期轨道. 定理 1 证完.

致谢：对廖山涛教授所给予的指导和启发，作者谨此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] 廖山涛，北京大学学报(自然科学版)，3(1979)，1--41.
[2] Irwin, M. C., *Smooth Dynamical Systems*, Academic Press, London and New York, 1980.
[3] Pugh, C., *Amer. J. Math.*, 89(1967), 1010—1021.
[4] Pugh, C. and Robinson, C., *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 3(1983), 261—313.
[5] 麦结华，中国科学，A辑，1986，5：458–466.