研究简报

关于混凝土徐变理论*

华南工学院　林南薰

我们进行的徐变试验研究[1]表明，混凝土流变性质可用 Burgers 模型描述，一般情况下徐变度 $\psi(t,\tau)$ 和弹性变形 $A(\tau)$ 的解析式可分别采用

$$\psi(t,\tau)=(b_1+b_2e^{-\gamma\tau})[1-e^{-\lambda(t-\tau)}]+c(e^{-\beta\tau}-e^{-\beta t}) \tag{1}$$

$$A(\tau)=A(1+ae^{-\alpha\tau})=\frac{1}{E_0}(1+ae^{-\alpha\tau}) \tag{2}$$

式中，b_1 和 b_2 为可逆徐变变形；c 为不可逆徐变变形；E_0 为弹性模量最终稳定值；α，a，γ，λ 和 β 为试验常数.

式 (1) 实质上综合了老化理论与弹性徐变体理论的徐变表达式，但我们用指数函数 $b_2e^{-\gamma\tau}$ 代替弹性徐变体理论采用的双曲线函数 b_2/τ，在试验常数 $\lambda\geqslant r$ 条件下，可避免出现负徐变变形的可能性[1,2]. 对于个别加荷期龄很早 (2—3 天) 的混凝土，可取 $\varphi(\tau)=b_1+b_2e^{-\gamma_1\tau}+b_3e^{-\gamma_2\tau}$，所增添的 $b_3e^{-\gamma_2\tau}$ 项，用以描述加荷初期剧烈衰减的部分可逆徐变变形[2,14].

我们用 WBK 法求解徐变基本方程. 记混凝土应力 $\sigma(t,\tau)$ 为 σ，应变 $\varepsilon(t,\tau)$ 为 ε，则单向轴压荷载作用下混凝土应力应变关系为积分方程

$$\varepsilon=A(1+ae^{-\alpha t})\sigma-\int_{\tau_0}^{t}\sigma\frac{\partial}{\partial\tau}[A(1+ae^{-\alpha\tau})+\psi(t,\tau)]d\tau \tag{3}$$

考虑关系式 (1) 和 (2)，将上式化为微分方程[2,5]

$$\sigma''+E_0P\sigma'+E_0Q\sigma=E_0f \tag{4}$$

式中

$$P=\frac{\lambda(A+b_1)+Aa(\lambda-\alpha)e^{-\alpha t}+\lambda b_2e^{-\gamma t}+c\beta e^{-\beta t}}{1+ae^{-\alpha t}}$$

$$Q=\frac{c\beta(\lambda-\beta)e^{-\beta t}}{1+ae^{-\alpha t}},\quad f=\frac{\varepsilon''+\lambda\varepsilon'}{1+ae^{-\alpha t}}$$

引入未知函数 $Z(t)$，使它和 σ 的关系为

$$\sigma=Ze^{-\frac{1}{2}E_0\int Pdt} \tag{5}$$

于是式 (4) 的齐次方程可化为

$$Z''-(n^2\eta_0+n\eta_1)Z=0 \tag{6}$$

式中 $n=E_0/2$，$\eta_0=P^2$，$\eta_1=P'-2Q$. 假定解的形式为

$$Z=e^{n\int\omega(t)dt} \tag{7}$$

* 1977 年 11 月 22 日收到.

则式 (7) 可化为黎卡提方程，然后把 ω 按 $\frac{1}{n}$ 幂级数展开：

$$\omega = \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega_\nu n^{-\nu} \tag{8}$$

再比较 n 的同次幂的系数，即可得到

$$\left.\begin{aligned}
\omega_0 &= \pm\sqrt{\eta_0} = \begin{cases} +P \\ -P \end{cases} \\
\omega_1 &= \frac{\eta_1 - \omega_0'}{2\omega_0} = \begin{cases} -\dfrac{Q}{P} \\ \dfrac{Q - P'}{P} \end{cases} \\
\omega_2 &= -\frac{\omega_1' + \omega_1^2}{2\omega_0} = \begin{cases} \dfrac{Q'P - QP' - Q^2}{2P^3} \\ \dfrac{2P'^2 - 3P'Q + PQ' - PP'' + Q^2}{2P^3} \end{cases} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\omega_{\nu+1} &= -\frac{1}{2\omega_0}\left(\omega_\nu' + \sum_{k=1}^{\nu} \omega_k \omega_{\nu+1-k}\right) \quad (\nu \geqslant 2)
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

利用式 (9) 可计算 ω 值到指定的精确度. 但由于 n 的数量级为 10^5, η 的数量级为 10^{-7}, 二者相比 n 值足够大，因此幂级数 (8) 快速收敛[4]，实用上只要使用 ω_0 和 ω_1 就可保证三位有效数字的精确度.

将式 (9) 依次代回式 (7) 和 (5)，可得各级近似解. 例如，零级近似解和一级近似解分别为

$$\sigma = k_1 + k_2 e^{-\int E_0 P dt} \tag{10}$$

$$\sigma = k_1 e^{-\int \frac{Q}{P} dt} + k_2 \frac{1}{P} e^{-\int (E_0 P - \frac{Q}{P}) dt} \tag{11}$$

初始条件为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma(\tau_0) &= \frac{\varepsilon(\tau_0)}{A(1 + a e^{-\alpha\tau_0})} \\
\sigma'(\tau_0) &= \frac{\varepsilon'(\tau_0) - [\lambda\varphi(\tau_0) + c\beta e^{-\beta\tau_0}]\sigma(\tau_0)}{A(1 + a e^{-\alpha\tau_0})}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

将一级近似解(11)代入式(4)对应的齐次方程，可以看出，忽略 Q^2/P^2, QP'/P^2, P'^2/P^3, QP'/P^3 和 Q^2/P^3 项后，方程恒等式才成立，由于 $P \gg Q$ 和 $P \gg P'$, 忽略这些微小项引起的误差很小，一级近似解与二级近似解的计算值相差不到 1%，因此一级近似解对工程已有足够的精确度，而且简单.

用参数变易法，并忽略微小项 Q/P^2 和 P'/P^2, 可导出非齐次方程 (4) 的一级近似通解为

$$\sigma = k_1 e^{-\int \frac{Q}{P} dt} + k_2 \frac{1}{P} e^{-\int \left(E_0 P - \frac{Q}{P}\right) dt} + e^{-\int \frac{Q}{P} dt} \int \frac{f}{P} e^{\int \frac{Q}{P} dt} dt$$

$$- \frac{1}{P} e^{-\int \left(E_0 P - \frac{Q}{P}\right) dt} \int f e^{\int \left(E_0 P - \frac{Q}{P}\right) dt} dt \tag{13}$$

例 1. 简单松弛应力分析 对 $\varepsilon = \text{const}$ 时的混凝土结构简单松弛应力分析，利用初始条件 (12)，式 (11) 可写为

$$\sigma(t, \tau) = \left[\sigma(\tau_0) - \frac{P_0 \sigma'(\tau_0) + Q_0 \sigma(\tau_0)}{2Q_0 - E_0 P_0^2 - P_0'}\right] e^{-\int_{\tau_0}^{t} \frac{Q}{P} dt} + \frac{P_0}{P} \frac{P_0 \sigma'(\tau_0) + Q_0 \sigma(\tau_0)}{2Q_0 - E_0 P_0^2 - P_0'} e^{-\int_{\tau_0}^{t} \left(E_0 P - \frac{Q}{P}\right) dt} \tag{14}$$

式中 $P_0 = P(\tau_0)$，$Q_0 = Q(\tau_0)$. 如能取徐变表达式试验常数 α，γ 为 β 的整数倍 (1—3 倍)，式 (14) 中两个有理分式便可用初等函数表达，显然它比级数法[2]、数值解[14] 或松弛系数法[3] 简便.

例 2. 徐变收缩应力分析 设混凝土收缩变形 $s(t, \tau)$ 表达式为

$$s(t, \tau) = s_0 e^{-\rho \tau} - s_0 e^{-\rho t} \tag{15}$$

式中 ρ 为试验常数. 如取 ρ 为 β 整数倍，则 $\rho = n\beta$. 因此

$$f = mQ^n = \frac{n\beta s_0(\lambda - n\beta)}{c^n \beta^n (\lambda - \beta)^n} Q^n \tag{16}$$

令变化不大的 $P = P_0$，它不会引起不允许的误差；同时积分 $\int \left(E_0 P_0 - \frac{Q}{P_0}\right) dt$ 中 $\frac{Q}{P_0}$ 值很小，再令 $Q = Q_0$；积出式 (13) 右端两个二次积分，得

$$\sigma(t, \tau) = k_1 e^{-\int \frac{Q}{P} dt} + k_2 e^{-\int \left(E_0 P - \frac{Q}{P}\right) dt} + m \sum_{k=1}^{n} \beta^{k-1} P_0^{k-1} Q^{n-k} + F e^{-\beta t} \tag{17}$$

式中 $$F = \frac{s_0 \rho (\lambda - \rho)}{P_0 (1 + a e^{-\alpha \tau_0}) \left(E_0 P_0 - \frac{Q_0}{P_0} - \rho\right)}$$

初始条件：$\sigma(\tau_0) = 0$，$\sigma'(\tau_0) = \dfrac{s'(\tau_0)}{A(1 + a e^{-\alpha \tau_0})}$

应指出，当 $\beta = \rho$ 时(混凝土的一般情况[7])，式 (17) 右端第三项为 $m = s_0/c$，这是它的精确值，此时式 (17) 更为简单.

算例 现验算式 (11) 或 (14). 所用数据的试验条件及参加人员同 [1]. $\tau_0 = 28$ 天时混凝土 15cm³ 抗压强度为 292kg/cm²，所加初始应力为 85kg/cm². 选用

$$\phi(t, \tau) \times 10^7 = (8 + 2.0 e^{-0.015\tau})[1 - e^{-0.28(t-\tau)}] + 61(e^{-0.005\tau} - e^{-0.05t}) \tag{18}$$

$$A(\tau) \times 10^7 = 27(1 + 0.38 e^{-0.015\tau}) \tag{19}$$

由表 1 可知，式 (18) 算值与试验值相差不超过 15%.

按式 (10)，(11) 或 (14) 等算出的松弛应力三级近似值及试验结果列于表 2，可见一级近似值的误差不超过试验值的 15%，一级近似值与二级近似值二者相差不超过 1%.

表 1　徐变度计算值与试验值

加荷期龄(天)	数据来源	各持荷时间的徐变度值(10^{-7})								
		1	3	5	10	15	40	90	140	200
28	试验数据	4.71	7.3	9.3	11.75	13.05	18.6	26.1	32.9	39.4
	按式(18)计算值	2.61	5.74	8.36	11.8	13.25	18.55	26.9	36.1	43.0
133	试验数据	3.54	5.77	7.29	9.30	10.8	15.0	21.2	28.0	33.8
	按式(18)计算值	2.65	5.69	8.57	9.75	12.35	15.72	21.2	24.7	28.9

表 2　松弛应力计算值与试验值

期龄为28天	数据来源	各持荷时间的松弛应力(kg/cm²)							
		0	1	8	15	50	105	170	∞
	试验数据	85	66.6	61.3	56.6	52.1	41.5	31.7	
	零级近似算值	85	77.6	65.3	64.5	64.4	64.4	64.4	64.4
	一级近似算值	85	77.1	62.3	59.7	48.1	37.0	30.4	15.5
	二级近似算值	85	77.08	62.14	59.86	48.1	37.0	30.2	15.6

期龄为133天	数据来源	各持荷时间的松弛应力(kg/cm²)					
		0	1	10	65	95	∞
	试验数据	85	69.5	61.6	53.4	46.1	
	零级近似算值	85	80.5	65.0	64.5	64.5	64.5
	一级近似算值	85	80.3	61.5	53.1	47.9	27.9
	二级近似算值	85	80.3	61.7	53.1	48.1	27.7

参　考　文　献

[1] 林南薰、曾成滋、朱锦年，华南工学院学报，2 (1965).
[2] 赵祖武，力学学报，3 (1962).
[3] 朱伯芳，水工混凝土的温度应力与温度控制，水利电力出版社(1976)，第十六章.
[4] E. 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社 (1977).
[5] Арутюнян, Н. Х., 徐变理论中的若干问题，科学出版社 (1961).
[6] Улицкий, И. И., 张忠岳, Голышев А. Б., Расчет железобетонных конструкций с учетом длительных процессов, Госстройиздат УССР (1963).
[7] Яценко, Е. А., Определение потерь предварительного напряжения от усадки и ползучести бетона с учетом деформаций упругого последействия бетона, Ползучеть строительных материалов и конструкций, Москва (1964).
[8] Illston, J. M., *M. C. R.*, **17** (1965), 50.
[9] The creep of structural concrete, Reporot of a Working Party of the Materials Technology Divisional Committee (1973).
[10] Constantinescu, D. R., Illston, J. M., *Material and Structures*, **7** (1974), 42.
[11] Constantinescu, D. R., Illston, J. M., *Materials and Structures*, **8** (1975), 43.
[12] England, G. L. and Jordaan, I. J., *Civil Engineering and Public Works Review*, **60** (1965), 513—517, 692—694, 846—847.
[13] England, G. L. and Jordaan, I. J., *M. C. R.*, **27** (1975), 92.
[14] Яшин, А. В., Ползучесть бетона в раннем возрасте, Трудыниижь, вып. 4 (1959).

ON THE THEORY OF CREEP IN CONCRETE

Lin Nan-xun

(*Huanan Engineering Institute*)