

文章编号: 1000-4750(2012)04-0217-07

大型复合材料夹芯筒屈曲分析中 芯材剪切变形与壳体锥度的影响

杨东升¹, 胡伟平², 孟庆春²

(1. 沈阳飞机设计研究所, 沈阳 110035; 2. 北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100191)

摘 要: 针对某卫星结构中的大型复合材料夹芯筒进行屈曲分析。首先分别建立柱壳段、锥壳段和框段的几何方程、物理方程与应变能表达式, 以及给定载荷条件下的外力势能表达式。然后根据位移边界条件采用正交完备的三角级数构造承力筒的位移模态, 最后根据最小势能原理求解临界载荷。通过对比计及与不计及芯材剪切变形和壳体锥度时临界载荷的计算结果, 发现对于该承力筒而言, 芯材剪切变形与壳体锥度对临界载荷计算结果的影响均小于 10%。该分析结果为承力筒在设计阶段的简化计算提供了理论依据。

关键词: 复合材料夹芯筒; 屈曲; 能量法; 剪切变形; 壳体锥度

中图分类号: V414.8 **文献标志码:** A

EFFECT OF SANDWICH SHEAR DEFORMATION AND SHELL TAPER ANGLE ON ELASTIC BUCKLING OF LARGE-SCALE COMPOSITE SANDWICH TUBE

YANG Dong-sheng¹, HU Wei-ping², MENG Qing-chun²

(1. Shenyang Aircraft Design & Research Institute, Shenyang 110035, China; 2. Solid Mechanics Institute, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: The elastic buckling problem of large-scale composite sandwich tubes in a satellite structure is analyzed. The geometry equations, constitutive equations and strain energy expressions of cylinder shell, conical shell and frames are constructed separately. And the potential energy of external forces is obtained under given loading conditions. According to the boundary conditions, the trigonometric series are applied to describing the displacement field. The principle of minimum potential energy is used to determine the critical load. The critical loads are obtained considering or neglecting the effects of sandwich shear deformation and shell taper angle separately, and then they are compared between the two conditions, demonstrating that the maximum error is less than 10%. Based on this research, a simplified method can be applied in the design stage of the large-scale composite sandwich tube in engineering.

Key words: composite sandwich tube; buckling; energy method; shear deformation; shell taper angle

由于复合材料具有高比强度、比刚度以及良好的材料性能可设计性等特点, 在航空航天结构中得到了越来越广泛的应用。复合材料夹芯筒是现代卫星结构中的一个主承力构件, 它主要承受各种外挂

件的轴向压缩载荷。由于在发射阶段, 轴向过载较大, 因此必需对该结构进行屈曲分析。板壳的屈曲问题是复合材料结构分析的重要问题^[1-2], 目前关于复合材料层合壳屈曲问题的解法主要有: 1) 基于

收稿日期: 2010-06-29; 修改日期: 2010-09-26

通讯作者: 胡伟平(1975—), 男, 湖南石门县人, 副教授, 博士, 从事复合材料力学研究(E-mail: huweiping@buaa.edu.cn).

作者简介: 杨东升(1965—), 男, 辽宁沈阳人, 研究员, 硕士, 从事飞行器设计研究;

孟庆春(1964—), 男, 辽宁沈阳人, 教授, 博士, 博导, 从事复合材料力学、断裂力学研究(E-mail: qcmeng@buaa.edu.cn).

Kirchhoff-Love 假设的经典层合板壳理论^[3-4]; 2) 考虑横向剪切变形的一阶剪切理论^[5-7]; 3) 考虑横向剪切变形的高阶剪切理论^[8-9]; 4) 基于各种理论的有限元方法^[10-13]。但对于大型工程结构而言, 尤其是在设计阶段, 往往需要采用满足一定精度要求但是简单快捷的方法得到计算结果, 这就需要对实际问题建立简化分析模型, 但是这种简化必须具有理论依据, 否则, 提供的计算结果将不可信。本文针对某大型复合材料承力筒进行屈曲分析, 对比计及与不计及芯材剪切变形和壳体锥度时临界载荷的计算结果, 以便为设计阶段的简化计算提供理论依据。

1 承力筒结构形式

图 1 为复合材料夹芯筒结构示意图。其下部是一个倒圆锥壳, 上部为圆柱壳。承力筒外联 4 个铝框, 内挂贮箱, 所受载荷来自贮箱液体和框上设备重量。

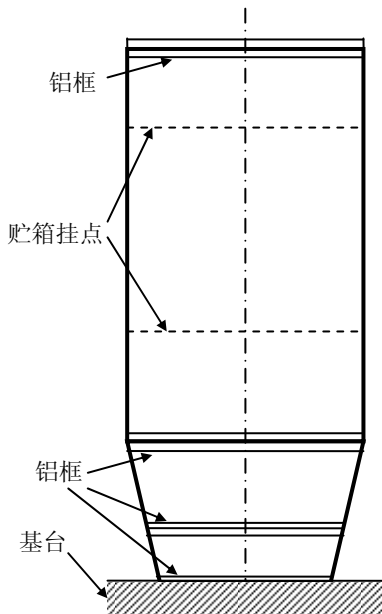


图 1 承力筒结构简图

Fig.1 Structure sketch of composite sandwich tube

承力筒为复合材料(碳纤维/环氧)和铝蜂窝芯的夹层结构。单向板的纤维方向拉伸模量为 E_1 , 垂直纤维方向拉伸模量为 E_2 , 剪切模量为 G_{12} ; 铝蜂窝芯材的剪切模量为 G_C ; 铝框拉压弹性模量为 E_F , 泊松比为 ν_F 。芯材高度为 H_C , 且沿筒轴向保持不变; 面板铺层数以内挂贮箱处为界分为 3 段, 下部为 26 层, 中间为 10 层, 上部为 6 层; 承力筒总长为 l , 第 1 段长度范围为 $0 \leq x \leq l_3$, 壳壁中心半径

为 R_1 , 第 2 段长度范围为 $l_3 < x \leq l_4$, 壳壁中心半径为 R_2 , 第 3 段长度范围为 $l_4 < x \leq l_5$, 壳壁中心半径为 R_3 ; 在承力筒的 5 个截面上作用有沿环向均匀分布质量, 5 个截面位置分别位于 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 、 l_5 , 质量分别为 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 。引入临界载荷参数 P_{cr} , 各截面质量引起的载荷可表示为 $P_j = \zeta_j P_{cr}$, 比例系数 ζ_j 由 5 处挂点质量比例关系确定。求出临界载荷参数 P_{cr} 后, 就可以得到承力筒的临界载荷。

2 柱壳段的分析

2.1 面板部分的基本方程

由于该结构有柱壳段和锥壳段, 厚度沿壳轴线方向分布不均匀, 壳外侧还连有 4 个铝框, 本文目的在于讨论芯材剪切变形与壳体锥度对失稳临界载荷的影响, 因此为了简化问题的分析, 假设筒壁横截面上任意径向线段在变形后仍为直线, 且不考虑壳体厚度的变化。建立如图 2 所示的坐标系。面板距中面为 z 处任意点的线位移可表示为:

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + \alpha_0 \cdot z \\ v_1 = v_0 - \beta_0 \cdot z \\ w_1 = w_0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: u_0 为承力筒中面上任意点沿母线方向的线位移; v_0 为承力筒中面上任意点沿圆周方向的线位移; w_0 为承力筒中面上任意点沿法线方向的线位移; α_0 为承力筒中面上任意点的法线绕圆周切线的角位移; β_0 为承力筒中面上任意点的法线绕母线的角位移。

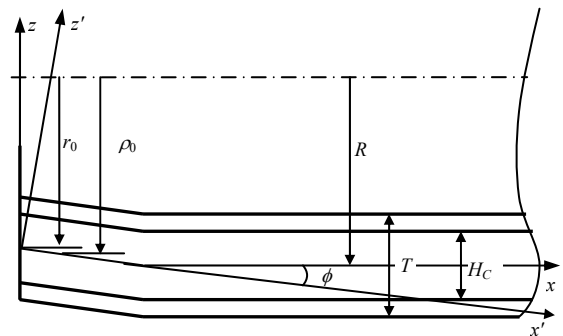


图 2 承力筒总体坐标与锥段局部坐标

Fig.2 Coordinate system of composite sandwich tube

在小变形条件下, 由式(1)及几何方程:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

可得应变分量的表达式:

$$\begin{cases} \varepsilon_{x1} = \varepsilon_1 + \kappa_1 \cdot z \\ \varepsilon_{\theta 1} = \varepsilon_2 + \kappa_2 \cdot z \\ \gamma_{x\theta 1} = \gamma + \kappa_{12} \cdot z \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x1} \\ \sigma_{\theta 1} \\ \tau_{x\theta 1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{\theta 1} \\ \gamma_{x\theta 1} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \kappa_1 = \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{w_0}{R}, & \kappa_2 = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \beta_0}{\partial \theta} \\ \gamma = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, & \kappa_{12} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \end{cases} \quad (4)$$

式中, R 为 x 处柱壳中面的半径。

在线弹性条件下, 柱壳的物理方程可表示为:

$$\delta U_T = \delta U_T^+ + \delta U_T^- = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{NS(i)} \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} \int_{z_k^-}^{z_{k-1}^+} (\sigma_{xk} \delta \varepsilon_x + \sigma_{yk} \delta \varepsilon_y + \tau_{xyk} \delta \gamma_{xy}) R_i dz dx d\theta + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{NS(i)} \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} \int_{-z_k^+}^{z_k^-} (\sigma_{xk} \delta \varepsilon_x + \sigma_{yk} \delta \varepsilon_y + \tau_{xyk} \delta \gamma_{xy}) R_i dz dx d\theta \quad (7)$$

将式(3)~式(5)代入式(7), 最后可得:

$$\delta U_T = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{NS(i)} \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} \{ (\bar{Q}_{11k} \varepsilon_1 + \bar{Q}_{12k} \varepsilon_2 + \bar{Q}_{16k} \gamma) T_k \delta \varepsilon_1 + (\bar{Q}_{11k} \kappa_1 + \bar{Q}_{12k} \kappa_2 + \bar{Q}_{16k} \kappa_{12}) T_{3k} \delta \kappa_1 + (\bar{Q}_{12k} \varepsilon_1 + \bar{Q}_{22k} \varepsilon_2 + \bar{Q}_{26k} \gamma) T_k \delta \varepsilon_2 + (\bar{Q}_{12k} \kappa_1 + \bar{Q}_{22k} \kappa_2 + \bar{Q}_{26k} \kappa_{12}) T_{3k} \delta \kappa_2 + (\bar{Q}_{16k} \varepsilon_1 + \bar{Q}_{26k} \varepsilon_2 + \bar{Q}_{66k} \gamma) T_k \delta \gamma + (\bar{Q}_{16k} \kappa_1 + \bar{Q}_{26k} \kappa_2 + \bar{Q}_{66k} \kappa_{12}) T_{3k} \delta \kappa_{12} \} 2R_i dx d\theta \quad (8)$$

式中:

$$T_k = z_{k-1}^+ - z_k^+, \quad T_{3k} = \frac{1}{3} ((z_{k-1}^+)^3 - (z_k^+)^3) \quad (9)$$

2.2 柱壳段芯材部分的基本方程

由前述变形假设, 芯材距中面为 z 处任意点的线位移可表示为:

$$\begin{cases} u_c = u_0 + \alpha_0 \cdot z \\ v_c = v_0 - \beta_0 \cdot z \\ w_c = w_0 \end{cases} \quad (10)$$

在小变形条件下, 由式(10)及几何方程, 可得芯材剪切变形的表达式:

$$\begin{cases} \gamma_{xzc} = \alpha_0 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{\theta zc} = -\beta_0 + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{v_0}{R} \end{cases} \quad (11)$$

式中, \bar{Q}_{11} 等为自然坐标系下的刚度矩阵项, 其详细表达式见文献[14]。

可以得到柱壳段面板的应变能:

$$U_T = U_T^+ + U_T^- = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{NS(i)} \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} \int_{z_k^-}^{z_{k-1}^+} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot R_i dz dx d\theta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{NS(i)} \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} \int_{-z_k^+}^{z_k^-} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot R_i dz dx d\theta \quad (6)$$

对式(6)求变分得:

柱壳段芯材的物理方程可表示为:

$$\tau_{xzc} = G_c \cdot \gamma_{xzc} \quad \tau_{\theta zc} = G_c \cdot \gamma_{\theta zc} \quad (12)$$

可以得到柱壳段芯材的剪切变形能:

$$U_C = \frac{1}{2} \cdot G_c \cdot \sum_{i=1}^3 \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xzc}^2 + \gamma_{\theta zc}^2) \cdot R_i dz dx d\theta \quad (13)$$

对式(13)求变分得:

$$\delta U_C = G_c \sum_{i=1}^3 \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xzc} \delta \gamma_{xzc} + \gamma_{\theta zc} \delta \gamma_{\theta zc}) R_i dz dx d\theta \quad (14)$$

3 锥壳段的分析

3.1 面板的基本方程

由前述变形假设, 在图 2 所示坐标系下, 距中面为 z 处任意点的线位移可表示为:

$$\begin{cases} u_2 = u_0 \cos \phi - w_0 \sin \phi + \alpha_0 \cdot z \\ v_2 = v_0 - \beta_0 \cos \phi \cdot z \\ w_2 = u_0 \sin \phi + w_0 \cos \phi \end{cases} \quad (15)$$

式中, u_2 、 v_2 、 w_2 为锥壳段上任一点处的三向位移。同样, 根据几何方程可得应变分量的表达式为:

$$\begin{cases} \varepsilon_{x2} = \varepsilon'_1 + \kappa'_1 \cdot z \\ \varepsilon_{\theta 2} = \varepsilon'_2 + \kappa'_2 \cdot z \\ \gamma_{x\theta 2} = \gamma' + \kappa'_{12} \cdot z \end{cases} \quad (16)$$

式中:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \cos^2 \phi - \frac{\partial w_0}{\partial x} \sin \phi \cos \phi, \quad \kappa'_1 = \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} \cos \phi \\ \varepsilon'_2 &= \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} - w_0 \right), \quad \kappa'_2 = \frac{1}{\rho_0} \left(\alpha_0 \sin \phi - \frac{\partial \beta_0}{\partial \theta} \cos \phi \right) \\ \gamma' &= \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \cos \phi - \frac{1}{\rho_0} \left(v_0 + \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \sin \phi \\ \kappa'_{12} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \alpha_0}{\partial \theta} + \frac{\beta_0}{\rho_0} \cos \phi \sin \phi - \frac{\partial \beta_0}{\partial x} \cos^2 \phi \end{aligned} \right. \quad (17)$$

式中, $\rho_0 = r_0 + x \tan \phi$ 。

在线弹性条件下, 锥壳的物理方程可表示为:

$$\delta U_Z = \delta U_Z^+ + \delta U_Z^- = \sum_{i=1}^1 \sum_{k=1}^{NS(i)} \int_0^{2\pi} \int_{a'_i}^{b'_i} \int_{z_{k-1}^+}^{z_k^+} (\sigma_{xk} \delta \varepsilon_x + \sigma_{yk} \delta \varepsilon_y + \tau_{xyk} \delta \gamma_{xy}) \rho_0 dz dx d\theta + \sum_{i=1}^1 \sum_{k=1}^{NS(i)} \int_0^{2\pi} \int_{a'_i}^{b'_i} \int_{-z_{k-1}^+}^{z_k^+} (\sigma_{xk} \delta \varepsilon_x + \sigma_{yk} \delta \varepsilon_y + \tau_{xyk} \delta \gamma_{xy}) \rho_0 dz dx d\theta \quad (20)$$

将式(15)~式(18)代入式(20), 最后可得:

$$\delta U_Z = 2 \sum_{i=1}^1 \sum_{k=1}^{NS(i)} \int_0^{2\pi} \int_{a'_i}^{b'_i} \{ (\bar{Q}_{11k} \varepsilon'_1 + \bar{Q}_{12k} \varepsilon'_2 + \bar{Q}_{16k} \gamma') T_k \delta \varepsilon'_1 + (\bar{Q}_{11k} \kappa'_1 + \bar{Q}_{12k} \kappa'_2 + \bar{Q}_{16k} \kappa'_{12}) T_{3k} \delta \kappa'_1 + (\bar{Q}_{12k} \varepsilon'_1 + \bar{Q}_{22k} \varepsilon'_2 + \bar{Q}_{26k} \gamma') T_k \delta \varepsilon'_2 + (\bar{Q}_{12k} \kappa'_1 + \bar{Q}_{22k} \kappa'_2 + \bar{Q}_{26k} \kappa'_{12}) T_{3k} \delta \kappa'_2 + (\bar{Q}_{16k} \varepsilon'_1 + \bar{Q}_{26k} \varepsilon'_2 + \bar{Q}_{66k} \gamma') T_k \delta \gamma' + (\bar{Q}_{16k} \kappa'_1 + \bar{Q}_{26k} \kappa'_2 + \bar{Q}_{66k} \kappa'_{12}) T_{3k} \delta \kappa'_{12} \} \rho_0 dx d\theta \quad (21)$$

式中:

$$T_k = z_{k-1}^+ - z_k^+, \quad T_{3k} = \frac{1}{3} ((z_{k-1}^+)^3 - (z_k^+)^3) \quad (22)$$

3.2 芯材的基本方程

由前述变形假设, 距中面为 z 处任意点的线位移可表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} u'_c &= u_0 \cos \phi - w_0 \sin \phi + \alpha_0 \cdot z \\ v'_c &= v_0 - \beta_0 \cos \phi \cdot z \\ w'_c &= u_0 \sin \phi + w_0 \cos \phi \end{aligned} \right. \quad (23)$$

在小变形条件下, 由式(23)及几何方程, 可得芯材剪切变形的表达式:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma'_{zxc} &= \alpha_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x} \sin \phi \cos \phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cos^2 \phi \\ \gamma'_{\theta zc} &= -\beta_0 \cos \phi + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \sin \phi + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \cos \phi + \frac{v_0}{\rho_0} \cos \phi \end{aligned} \right. \quad (24)$$

柱壳段芯材的物理方程可表示为:

$$\tau'_{zxc} = G_c \cdot \gamma'_{zxc} \quad \tau'_{\theta zc} = G_c \cdot \gamma'_{\theta zc} \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{x2} \\ \sigma_{\theta 2} \\ \tau_{x\theta 2} \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{x2} \\ \varepsilon_{\theta 2} \\ \gamma_{x\theta 2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中, \bar{Q}_{11} 等为自然坐标系下的刚度矩阵项, 其详细表达式见文献[14]。

可以得到锥壳段面板的应变能:

$$U_Z = U_Z^+ + U_Z^- = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^1 \sum_{k=1}^{NS(i)} \int_0^{2\pi} \int_{a'_i}^{b'_i} \int_{z_{k-1}^+}^{z_k^+} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rho_0 dz dx d\theta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^1 \sum_{k=1}^{NS(i)} \int_0^{2\pi} \int_{a'_i}^{b'_i} \int_{-z_{k-1}^+}^{z_k^+} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rho_0 dz dx d\theta \quad (19)$$

对式(19)求变分得:

可以得到芯材的剪切变形能:

$$U'_C = \frac{1}{2} G_c \sum_{i=1}^1 \int_0^{2\pi} \int_{a'_i}^{b'_i} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma'^2_{zxc} + \gamma'^2_{\theta zc}) \rho_0 dz dx d\theta \quad (26)$$

对式(26)求变分得:

$$\delta U'_C = G_c \sum_{i=1}^1 \int_0^{2\pi} \int_{a'_i}^{b'_i} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma'_{zxc} \delta \gamma'_{zxc} + \gamma'_{\theta zc} \delta \gamma'_{\theta zc}) \rho_0 dz dx d\theta \quad (27)$$

4 框的变形能

由于壳体外连框段的高度(沿筒径向)远小于承力筒半径, 框的变形主要是环向拉压变形, 因此只考虑其拉压变形能。又由于边界条件的限制, 顶框和底框的环向变形为零, 所以下只需考虑中间两个框的变形能。

4.1 柱壳段框的变形能

$$U_{f1} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{z_2}^{z_1} \int_{x_2}^{x_1} E \varepsilon_\theta^2 R f_1 d\theta dx dz + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{z_4}^{z_3} \int_{x_4}^{x_3} E \varepsilon_\theta^2 R f_1 d\theta dx dz \quad (28)$$

对式(28)求变分得:

$$\delta U_{f1} = \int_0^{2\pi} \int_{z_2}^{z_1} \int_{x_2}^{x_1} E \varepsilon_\theta \delta \varepsilon_\theta R f_1 d\theta dx dz + \int_0^{2\pi} \int_{z_4}^{z_3} \int_{x_4}^{x_3} E \varepsilon_\theta \delta \varepsilon_\theta R f_1 d\theta dx dz \quad (29)$$

4.2 锥壳段框的变形能

$$U'_{f2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{z'_2}^{z'_1} \int_{x'_2}^{x'_1} E \varepsilon_\theta'^2 R f_2 d\theta dx_2 dz_2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{z'_4}^{z'_3} \int_{x'_4}^{x'_3} E \varepsilon_\theta'^2 R f_2 d\theta dx_2 dz_2 \quad (30)$$

对式(30)求变分得:

$$\delta U'_{f2} = \int_0^{2\pi} \int_{z'_2}^{z'_1} \int_{x'_2}^{x'_1} E \varepsilon'_\theta \delta \varepsilon'_\theta R f_2 d\theta dx_2 dz_2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{z_4}^{z_3} \int_{x_4}^{x_3} E \varepsilon'_\theta \delta \varepsilon'_\theta R f_2 d\theta dx_2 dz_2 \quad (31)$$

5 外力势能

承力筒上的外载荷来自于框上设备和内挂贮箱的质量。柱壳段部分的外力势能为:

$$V_Z = \sum_{i=2}^5 \frac{P_{cr}}{2\pi R_j} \xi_i \int_{l_2}^{l_1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 R_j d\theta dx \quad (32)$$

对式(32)求变分:

$$\delta V_Z = \sum_{i=2}^5 \frac{P_{cr}}{2\pi R_j} \xi_i \int_{l_2}^{l_1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dw_0}{dx} \right) \delta \left(\frac{dw_0}{dx} \right) R_j d\theta dx \quad (33)$$

锥壳段部分的外力势能为:

$$V'_Z = \frac{P_{cr}}{2\pi \rho_0} \xi_1 \int_0^{l_1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{dw_2}{dx_2} \right)^2 \rho_0 d\theta dx + \sum_{i=2}^5 \frac{P_0}{2\pi \rho_0} \xi_i \int_0^{l_2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{dw_2}{dx_2} \right)^2 \rho_0 d\theta dx \quad (34)$$

对式(34)求变分:

$$\delta V'_Z = \frac{P_{cr}}{2\pi \rho_0} \xi_1 \int_0^{l_1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dw_2}{dx_2} \right) \delta \left(\frac{dw_2}{dx_2} \right) \rho_0 d\theta dx + \sum_{i=2}^5 \frac{P_{cr}}{2\pi \rho_0} \xi_i \int_0^{l_2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dw_2}{dx_2} \right) \delta \left(\frac{dw_2}{dx_2} \right) \rho_0 d\theta dx \quad (35)$$

6 位移函数设置与系数矩阵生成

6.1 基本位移函数的设置

根据承力筒顶面和底面与其它部件的连接情况,其约束条件相当于筒支边界条件,在 $x=0$ 的截面上 3 个中面线位移为零,在 $x=l$ 的截面上中面切向位移和挠度为零,轴向位移不限制。得到如下所示面板中面位移模式:

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{m,n} A_{mn} \left(\cos \frac{m\pi x}{l} - 1 \right) \sin(n\theta) \\ v_0 = \sum_{m,n} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos(n\theta) \\ w_0 = \sum_{m,n} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin(n\theta) \\ \alpha_0 = \sum_{m,n} D_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin(n\theta) \\ \beta_0 = \sum_{m,n} E_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos(n\theta) \end{cases} \quad (36)$$

式中: A_{mn} 、 B_{mn} 、 C_{mn} 、 D_{mn} 、 E_{mn} 为位移模式中的待定广义位移; $m, n=1, 2, 3, \dots$, 表示级数中函数项的编码。

6.2 系数矩阵的生成

将式(36)分别代入式(8)、式(14)、式(21)、式(27)、式(29)、式(31)、式(35)中,并根据最小势能原理:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta V = 0 \quad (37)$$

式中: Π 为系统总势能; U 为系统总应变能; V 为总外力势能。

可得到如下表达式:

$$P_{cr} \begin{bmatrix} SCC & SAC & SBC & SDC & SEC \\ SCA & SAA & SBA & SDA & SEA \\ SCB & SAB & SBB & SDB & SEB \\ SCD & SAD & SBD & SDD & SED \\ SCE & SAE & SBE & SDE & SEE \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{pq} \\ A_{pq} \\ B_{pq} \\ D_{pq} \\ E_{pq} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} GCC & GAC & 0 \\ GCA & GAA & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{pq} \\ A_{pq} \\ B_{pq} \\ D_{pq} \\ E_{pq} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

式中的系数均可得到具体表达形式,在此就不赘述。求解式(38)的特征值,即可求出临界载荷 P_{cr} 。真实的临界载荷即为其中的最小值。

7 计算结果

根据承力筒所给结构尺寸和材料参数,计算结果见表 1 所示。

表 1 考虑壳体锥度与芯材剪切变形时临界载荷收敛情况
Table 1 The critical load considering shell taper angle and sandwich shear deformation

M	N			
	2	3	4	5
1	1.3715×10 ⁴	9.4969×10 ³	9.4969×10 ³	9.4969×10 ³
3	6.6860×10 ³	2.9096×10 ³	2.3809×10 ³	2.3809×10 ³
5	4.5602×10 ³	2.8419×10 ³	2.3137×10 ³	2.2588×10 ³
7	2.9674×10 ³	2.5163×10 ³	2.2183×10 ³	2.1863×10 ³
9	2.3788×10 ³	2.2997×10 ³	2.1510×10 ³	2.1461×10 ³
11	2.1689×10 ³	2.1510×10 ³	2.0875×10 ³	2.0875×10 ³
13	2.0556×10 ³	2.0535×10 ³	2.0456×10 ³	2.0456×10 ³
15	2.0493×10 ³	2.0493×10 ³	2.0305×10 ³	2.0305×10 ³
20			2.0155×10 ³	
30			2.0029×10 ³	
40			1.9965×10 ³	
50			1.9926×10 ³	
60			1.9899×10 ³	
70			1.9879×10 ³	

由表 1 可以看出,当 M 取到 15 时, N 方向取

到 4 结果已收敛,因此 $M=15$ 以后只给出 $N=4$ 时 M 方向的收敛情况。以上计算结果显示,当 $N=4$ 时,所求得的临界载荷随 M 的增大而减小直至趋于稳定,最后取临界载荷为: $P_{cr}=1988\text{kN}$ 。

为了考虑芯材剪切变形对临界载荷的影响,将以上情况退化考虑锥度但不及芯材剪切效应的情况。计算时将芯材剪切刚度取为真实剪切刚度 $\times 10^6$ GPa,其它条件不变。以下是计算结果,见表 2。

表 2 仅考虑壳体锥度时临界载荷收敛情况

Table 2 The critical load considering shell taper angle only

M	N			
	2	3	4	5
1	9.2890×10^5	9.2890×10^5	9.2890×10^5	9.2890×10^5
5	6.6136×10^3	3.9611×10^3	3.0102×10^3	3.0102×10^3
10	2.4366×10^3	2.3898×10^3	2.3512×10^3	2.2579×10^3
15	2.2044×10^3	2.2044×10^3	2.2044×10^3	2.2044×10^3
20	2.1933×10^3	2.1933×10^3	2.1933×10^3	2.1933×10^3
24	2.1889×10^3			
28	2.1863×10^3			
32	2.1842×10^3			
36	2.1823×10^3			
40	2.1808×10^3			

由表 2 可以看出,当 M 取到 20 时, N 方向取到 2 结果已收敛,因此 $M=20$ 以后只给出 $N=2$ 时 M 方向的收敛情况。计算结果显示,当 $N=2$ 时,所求得的临界载荷随 M 的增大而减小直至趋于稳定。最后取临界载荷为: $P_{cr}=2181\text{kN}$ 。

为了考虑壳体锥度对临界载荷的影响,将计算模型退化考虑锥度但计及芯材剪切效应的情况。计算时将锥壳段的锥度角取为零,其它条件不变,以下是计算结果,见表 3。

表 3 仅考虑芯材剪切变形时临界载荷收敛情况

Table 3 The critical load considering sandwich shear deformation only

M	N			
	2	3	4	5
1	1.0648×10^4	5.9051×10^3	5.9051×10^3	5.9051×10^3
5	4.0464×10^3	3.0871×10^3	2.3435×10^3	2.2315×10^3
10	2.1958×10^3	2.1731×10^3	2.1131×10^3	2.0890×10^3
15	2.0492×10^3	2.0492×10^3	2.0492×10^3	2.0492×10^3
20	2.0430×10^3	2.0430×10^3	2.0387×10^3	2.0387×10^3
22			2.0354×10^3	
26			2.0315×10^3	
30			2.0276×10^3	
34			2.0247×10^3	
38			2.0231×10^3	
42			2.0210×10^3	
46			2.0197×10^3	
48			2.0192×10^3	
50			2.0186×10^3	

由表 3 可以看出,当 M 取到 20 时, N 方向取到 4 结果已收敛,因此 $M=20$ 以后只给出 $N=4$ 时 M 方向的收敛情况。计算结果显示,当 $N=4$ 时,所求得的临界载荷随 M 的增大而减小直至趋于稳定。最后取临界载荷为: $P_{cr}=2019\text{kN}$ 。

将计算模型退化考虑锥度且不计及芯材剪切变形的情况,计算时将锥壳段的锥度角取为零,并将芯材剪切刚度取成足够大,其它条件不变,以下是计算结果,见表 4。

表 4 不考虑芯材剪切变形与锥度角时临界载荷收敛情况

Table 4 The critical load without considering sandwich shear deformation and shell taper angle

M	N			
	2	3	4	5
1	2.5861×10^4	2.5861×10^4	2.5861×10^4	2.5861×10^4
3	7.8203×10^3	4.8929×10^3	3.8102×10^3	3.8102×10^3
5	4.4414×10^3	3.4210×10^3	2.6079×10^3	2.6079×10^3
7	3.1366×10^3	2.9799×10^3	2.4853×10^3	2.2970×10^3
9	2.4777×10^3	2.4208×10^3	2.3648×10^3	2.2705×10^3
11	2.2943×10^3	2.2923×10^3	2.2753×10^3	2.2520×10^3
13	2.2062×10^3	2.2062×10^3	2.2062×10^3	2.2062×10^3
15	2.2029×10^3	2.2029×10^3	2.2029×10^3	2.2029×10^3
17	2.1953×10^3	2.1953×10^3	2.1953×10^3	2.1953×10^3
19	2.1909×10^3	2.1909×10^3	2.1909×10^3	2.1909×10^3
20	2.1899×10^3			
24	2.1858×10^3			
28	2.1836×10^3			
32	2.1810×10^3			
38	2.1789×10^3			
42	2.1773×10^3			
46	2.1762×10^3			
48	2.1760×10^3			
50	2.1756×10^3			

由表 4 可以看出,当 M 取到 19 时, N 方向取到 2 结果已收敛,因此 $M=19$ 以后只给出 $N=2$ 时 M 方向的收敛情况。计算结果显示,当 $N=2$ 时,所求得的临界载荷随 M 的增大而减小直至趋于稳定。最后取临界载荷为: $P_{cr}=2176\text{kN}$ 。

将以上 4 种情况的计算结果进行对比,如表 5 所示。

表 5 各种模型下临界载荷的对比

Table 5 The comparison of critical loads obtained from different models

	计及锥度和 剪切变形	只计 锥度	只计 剪切变形	不计锥度和 剪切变形
P_{cr}/kN	1988	2181	2019	2176
相对误差/(%)	0	9.7	1.5	9.4

8 结论

通过以上计算可知,对于该大型复合材料承力筒的屈曲分析:

(1) 考虑壳体锥度和芯材剪切变形会降低结构的临界载荷, 其中芯材剪切变形的影响相对较大。

(2) 计算结果显示, 4 种情况的临界载荷相对误差不超过 10%, 说明在设计阶段可以将该承力筒筒化成圆柱筒并不考虑芯材剪切变形进行临界载荷估算, 大大简化问题的分析, 快速得到计算结果。

参考文献:

- [1] Lessia. A W. A review of laminated composite plate buckling [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1987, 40(5): 575—591.
- [2] 邹志庆, 沈大荣. 不同边界条件正交各项异性中厚板的振动与稳定性分析[J]. *应用力学学报*, 1992, 9(2): 1—6.
Zou Zhiqing, Shen Darong. Vibration and stability analysis of middle thickness orthotropic laminates with various boundary conditions [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1992, 9(2): 1—6. (in Chinese)
- [3] Geier B, Meyer-Piening H-R, Zimmermann R. On the influence of laminate stacking on buckling of composite cylindrical shells subjected to axial compression [J]. *Composite Structures*, 2002, 55: 467—474.
- [4] Ambartsumian S A. Theory of anisotropic shells [R]. NASA TT F-118, 1964.
- [5] Rikards R, Chate A K. Vibration and damping analysis of laminated composite and sandwich shells [J]. *Mechanics of Composite Materials*, 1997, 4: 209—240.
- [6] Mao Renjie, Lu C-H. Buckling analysis of a laminated cylindrical shell under torsion subjected to mixed boundary conditions [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 36: 3821—3825.
- [7] Soldators K P. Nonlinear analysis of transverse shear deformable laminated composite cylindrical shells Part 1& 2 [J]. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 1992, 114: 105—109.
- [8] Reddy J N. A simple high-order theory for laminated composite plates [J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1984, 51: 745—752.
- [9] Reddy J N, Liu C F. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1985, 23(3): 319—348.
- [10] Prusty B G. Free vibration and buckling response of hat-stiffened composite panels under general loading [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, 50: 1326—1333.
- [11] Kim Ki-Du, Lee Chang-Soo, Han Sung-Cheon. A 4-node co-rotational ANS shell element for laminated composite structures [J]. *Composite Structures*, 2007, 80: 234—252.
- [12] Rikards R, Chate A, Ozolinsh O. Analysis for buckling and vibrations of composite stiffened shells and plates [J]. *Composite Structures*, 2001, 51: 361—370.
- [13] Han J Y, Jung H Y, Cho J R, Choi J H, Bae W B. Buckling analysis and test of composite shells under hydrostatic pressure [J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2008, 20(I): 742—745.
- [14] 蒋永秋, 陆逢升, 顾志建. 复合材料力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1993.
Jiang Yongqiu, Lu Fengsheng, Gu Zhijian. *Mechanics of composite materials* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1993. (in Chinese)
- [9] Chopra A. Earthquake response of concrete gravity dams [J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1970, 96(4): 443—454.
- [10] 刘焕忠, 李青, 庄茁, Yamaguchi S, Toyoda M. 发展附加质量模型应用于储液罐的动力分析[J]. *工程力学*, 2005, 22(增刊): 161—171.
Liu Huanzhong, Li Qing, Zhuang Zhuo, Yamaguchi S, Toyoda M. Development of added mass model and application to dynamic analysis of cylindrical tanks [J]. *Engineering Mechanics*, 2005, 22(Suppl): 161—171. (in Chinese)
- [11] 罗金玲, 何海波. 潜射导弹的空化特性研究[J]. *战术导弹技术*, 2004(3): 14—17.
Luo Jinling, He Haibo. Research on cavitation for under-water launching missile [J]. *Tactical Missile Technology*, 2004(3): 14—17. (in Chinese)
- [12] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
Wang Xucheng. *Finite Element method* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese)

(上接第 209 页)