第 26 卷 第 4 期　　力 学 学 报　　Vol. 26, No.4
1994 年 7 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　July, 1994

重频模态可控可观性的度量与主模态概念[1)]

刘中生　王大钧　胡海昌
(北京大学力学系，北京 100871)

摘要　本文研究重频模态的可控性和可观性的定量度量以及不变子空间的可控性结构和可观性结构问题. 提出了一种利用奇异值来度量重频模态可控性和可观性的方法，同时提出了如何获得一组新的重频模态向量，使得在这组模态坐标下，子空间的可控性结构或可观性结构有更加明了的表达.

关键词　振动控制，可控可观性，重频模态，大型空间结构

前　言

大型空间柔性结构振动控制面临的一个困难问题就是在固有频率的低频段存在重频或密频模态[1,2], 很多著者回避这个问题，限于讨论无重频无密频结构的振动控制问题. 对于振动的正问题而言，重频或密频的出现将使相应的模态不易算准；对于振动模态识别而言，重频密频模态不易准确识别；对于振动控制而言，重频密频模态的可控可观度量、受控模态的选择、模型降阶和控制策略的鲁棒性等问题，将更加难以处理. 文献 [3] 、[4] 讨论了密频模态的性质及其摄动分析方法，论证了单个振型的病态性和不变子空间的良态性；文献 [5—7] 提出了重频模态可控性和可观性的判别准则 (矩阵秩的判别定理). 然而，这个准则只能回答可控性和可观性的 "能" 或 "不能", 实际问题中，不仅需要回答 "能" 还是 "不能", 还需要回答 "能" 的程度，以及不变子空间的可控结构和可观结构. 它们对于模型降阶、选择受控模态、设计控制力布局和传感器布局，以及控制策略的鲁棒性分析等问题都是不可缺少的.

一、基本方程

考虑下面的线性时不变二阶系统

$$M\ddot{x} + Kx = Bu(t) \tag{1a}$$

$$y = Cx(t) \tag{1b}$$

其中 $M = M^{\mathrm{T}} \in R^{n\times n}, K = K^{\mathrm{T}} \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times p}, C \in R^{l\times n}, x(t) \in R^n, u(t) \in R^p, y \in R^l$. 矩阵 B 和 C 分别称为控制分布矩阵和传感器分布矩阵，它们分别由控制力和传

1) 国家自然科学基金和高校博士学科点专项科研基金资助项目.
本文于 1993 年 2 月 22 日收到第一稿， 1993 年 6 月 23 日收到修改稿.

感器的位置决定；矩阵 M 和 K 的物理意义取决于系统本身，对于采用离散化方法建模的空间柔性结构，它们分别代表质量阵和刚度阵．为讨论方便起见，这儿假定它们是正定的．

将方程 (1) 变换到模态坐标上，即令

$$x(t)=\Phi\eta(t) \tag{2}$$

可得

$$\ddot{\eta}(t)+\Delta\eta(t)=\Phi^{\mathrm{T}}Bu(t) \tag{3a}$$

$$y=(C\Phi)\eta(t) \tag{3b}$$

其中 $\Phi\triangleq[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n]$，$\Lambda\triangleq\mathrm{diag}(\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots,\omega_n^2)$ 是特征值问题

$$K\varphi_i=\omega_i^2M\varphi_i \tag{4a}$$

$$\varphi_i^{\mathrm{T}}M\varphi_i=1 \tag{4b}$$

的特征解，其中 $0<\omega_1\le\omega_2\le\cdots\le\omega_n$．

假设 $\omega_1=\omega_2=\cdots=\omega_r=\omega_0$ 是一组 r 重的重频率，那么相应于 ω_0 的模态坐标 $\eta_0(t)=\{\eta_1(t),\eta_2(t),\cdots,\eta_r(t)\}^{\mathrm{T}}$ 下的控制方程可写为

$$\ddot{\eta}_0(t)+\omega_0^2I_r\eta_0(t)=B_0u(t) \tag{5a}$$

对方程 (3b) 进行分块表达为

$$y=C[\Phi_0\vdots\Phi_d]\begin{bmatrix}\eta_0(t)\\ \cdots\\ \eta_d(t)\end{bmatrix}$$

那么，相应于重频模态的输出量 y_0 为

$$y_0=C_0\eta_0(t) \tag{5b}$$

其中 $B_0\in R^{rxp},C_0\in R^{lxr},I_r$ 是 r 阶单位阵

$$B_0=\Phi_0^{\mathrm{T}}B \tag{5c}$$

$$C_0=C\Phi_0 \tag{5d}$$

$$\Phi_0\triangleq[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_r]\ ,\quad \Phi_d\triangleq[\varphi_{r+1},\varphi_{r+2},\cdots,\varphi_n]$$

二、重频模态可控可观的充要条件[5-7]

由方程 (5) 描述的重频模态系统，即 ω_0 的 r 重模态坐标系统，它的可控性充要

条件为

$$秩(B_0) = r \tag{6}$$

它的可观性充要条件为

$$秩(C_0) = r \tag{7}$$

三、度量方法和子空间的可控可观结构

条件 (6) 、(7) 只能给出可控性和可观性的“能”或“不能”这样的回答，不能说明“能”的程度，也没有揭示子空间的可控可观性结构. 另外，矩阵秩的计算问题是数值上的“病态”问题[8].

首先讨论方程 (5) 的可控性度量和子空间 Φ_0 的可控性结构，对 $B_0 \in R^{r\times p}$ 进行 SVD 分解

$$B_0 = USV^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

其中 $U \in R^{r\times r}$, $V \in R^{p\times p}$, $U^{\mathrm{T}}U = I_r$, $V^{\mathrm{T}}V = I_p$

$$S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

并且 $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m)$, 这里的非零正数 σ_i 按降序排列，即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_m > 0$.

在 (8) 式两侧前乘 U^{T}, 并注意到 $B_0 = \Phi_0^{\mathrm{T}}B$, 得

$$\overline{\Phi}_0^{\mathrm{T}}B = SV^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

其中

$$\overline{\Phi}_0 = \Phi_0 U \tag{10}$$

由于 Φ_0 是相应于重频率 ω_0 的振型向量矩阵，因此，$\overline{\Phi}_0$ 仍然是相应于 ω_0 的振型向量矩阵，并且满足关于质量阵 M 的归一条件，即

$$\overline{\Phi}_0^{\mathrm{T}}M\overline{\Phi}_0 = I_r \tag{11}$$

为了说明 $\overline{\Phi}_0$ 和 σ_i 所提供的关于重频模态可控性的信息，让我们引入一组新的重频模态坐标 $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r\}^{\mathrm{T}}$, 即令

$$x = \overline{\Phi}_0\xi \tag{12}$$

将坐标变换式 (12) 代入 (1) 式，得

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 I_0 \xi = \overline{\Phi}_0^{\mathrm{T}}Bu(t) \tag{13a}$$

$$y_0 = C\overline{\Phi}_0\xi \tag{13b}$$

将 (9) 式代入 (13a) 式右侧，得

$$\ddot{\xi}+\omega_0^2 I_0\xi = SV^{\mathrm{T}}u(t) \tag{14}$$

如令 $u'(t)\triangleq V^{\mathrm{T}}u(t)$, 那么 (14) 式可写为

$$\ddot{\xi}+\omega_0^2 I_0\xi = Su'(t) \tag{15}$$

由于 $V^{\mathrm{T}}V=I_p$, 因此可以认为 $u(t)$ 和 $u'(t)$ 在模的意义上是等价的.

从方程 (15) 可以十分清晰地看出各个重频模态坐标 ξ_i 的可控性的定性与定量特征：

1. 全部的重频模态坐标 $\xi_i(i=1,2,\cdots,r)$ 可控的充要条件为

$$秩(S)=r$$

即 $p\geq r$, 且 $m=r$.

2. 当 $0<m<r$ 时，只有一部分重频模态坐标是可控的，即 $\xi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是可控的，而 $\xi_i(m+1\leq i\leq r)$ 是不可控的.

3. 由于 $u'(t)$ 和 $u(t)$ 在模的意义上是等价的，因此， ξ_i 的可控性可由 σ_i 来度量， σ_i 越大意味着用较小的能耗就可以对 ξ_i 产生较强的控制作用.

由于在模态坐标 ξ 下的可控性具有这样清晰明了的特征，我们称 ξ_i 为第 i 个可控主模态坐标，相应的振型向量 φ_i 为第 i 个可控主振型 (主模态), 相应的模态矩阵 $\overline{\Phi}_0\triangleq\left[\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\cdots,\overline{\varphi}_m\right]$ 称为可控主模态矩阵.

按照完全类似的方法，我们可以找到一组新的重频模态坐标 $\rho=\{\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_r\}^{\mathrm{T}}$, 在坐标 ρ 下的控制方程的可观性同样具有清晰明了的特征.

对矩阵 C_0 进行 SVD 分解，得

$$C_0=U_0S_0V_0^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

其中 $U_0\in R^{l\times l}$, $V_0\in R^{r\times r}$, $U_0^{\mathrm{T}}U_0=I_l$, $V_0^{\mathrm{T}}V_0=I_r$

$$S_0=\begin{bmatrix}\Sigma_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\Sigma_0=\mathrm{diag}(\sigma_{01},\sigma_{02},\cdots,\sigma_{0s})$, $\sigma_{01}\geq\sigma_{02}\geq\cdots\geq\sigma_{0s}>0$. 对方程 (1) 实行下面的坐标变换

$$x(t)=\Psi_0\rho(t) \tag{17}$$

其中

$$\Psi_0\triangleq\Phi_0V_0 \tag{18}$$

得到 ρ 坐标下的方程为

$$\ddot{\rho}(t)+\omega_0^2I_0\rho(t)=\Psi_0^{\mathrm{T}}Bu(t) \tag{19a}$$

$$y_0=C\Psi_0\rho(t) \tag{19b}$$

由于 Ψ_0 是 ω_0 的模态矩阵，而且满足关于质量阵 M 的归一条件，即

$$\Psi_0^{\mathrm{T}} M \Psi_0 = V_0^{\mathrm{T}} \Phi_0^{\mathrm{T}} M \Phi_0 V_0 = I_r$$

因此， $\rho(t)$ 仍是 ω_0 的模态坐标.

因为 $C_0 = C\Phi_0$, 所以可将 (19b) 式写为

$$y_0 = C_0 V_0 \rho(t) \tag{20}$$

将 (16) 式代入 (20) 式得

$$y_0 = U_0 S_0 \rho(t) \tag{21}$$

考虑输出量大小的一种度量 J_0

$$J_0 \triangleq y_0^{\mathrm{T}} y_0 \tag{22}$$

可得

$$J_0 = \rho^{\mathrm{T}}(t) S_0^{\mathrm{T}} S_0 \rho(t) = \rho^{\mathrm{T}}(t) \begin{bmatrix} \Sigma_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rho(t) \tag{23}$$

从方程 (23) 可以十分清晰地看出各个重频模态 $\rho_i(t)(i=1,2,\cdots,r)$ 的可观性的定性与定量特征：

1. 全部的重频模态坐标 $\rho_i(t)(i=1,2,\cdots,r)$ 可观的充要条件为

$$\text{秩}(S_0) = r \qquad \text{即} l \geq r \text{且} s = r$$

2. 当 $0 < s < r$ 时，只有部分坐标 $\rho_i(t)(i=1,2,\cdots,s)$ 是可观的，其余的坐标 $\rho_i(t)(s+1 \leq i \leq r)$ 是不可观的.

3. $\rho_i(t)(i=1,2,\cdots,s)$ 的可观性由 σ_{0i} 度量， σ_{0i} 越大， $\rho_i(t)$ 在 J_0 中的成分就越大.

由于在模态坐标 $\rho(t)$ 下的可观性具有这样简明直观的特点，我们称 $\rho_i(t)$ 为第 i 个可观主模态，相应的振型向量 ψ_i 为第 i 个可观主振型 (主模态), 模态矩阵 $\Psi_0(\Psi_0 \triangleq \Phi_0 V_0 = [\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_s])$ 称之为可观主模态阵. 从前面的推导过程可知，当 $B = C^{\mathrm{T}}$ 时，两种主模态重合.

四、数值例子

为了说明上面方法，我们假设一个 n 个自由度的振动控制系统，假设它的前四阶频率为非亏损的重频率，相应的振型向量矩阵为 $\Phi_0 \in R^{n\times 4}$, 假设相应于重频的振动控制方程 (即通过变换 $x = \Phi_0 \eta$ 后) 具有下列形式

$$\begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \\ \ddot{\eta}_4 \end{bmatrix} + \omega_0^2 I_4 \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 2.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{bmatrix}$$

即矩阵 B_0 和 C_0 分别为

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 2.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

对 B_0 进行 SVD 分解，得

$$U = \begin{bmatrix} .187592 & .794654 & -.500000 & -.288675 \\ .303531 & -.491123 & -.211325 & -.788675 \\ .491123 & .303531 & .788675 & -.211325 \\ .794654 & -.187592 & -.288675 & .500000 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} .850651 & .525731 \\ -.525731 & .850651 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \mathrm{diag}(2.802517, 1.070466)$$

再进行一次坐标变换，即令 $\eta = U\xi$, 实际上相当于令 $x = (\Phi_0 U)\xi$, 得 ξ 坐标下的方程

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \\ \ddot{\xi}_3 \\ \ddot{\xi}_4 \end{bmatrix} + \omega_0^2 I \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.802517 & 0 \\ 0 & 1.070466 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.850625 & -0.525731 \\ 0.525731 & 0.850625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \right)$$

由这个方程可知，ξ_1 和 ξ_2 是可控的，与 ξ_2 对应 $\sigma_1 = 2.802517$, 与 ξ_2 对应的 $\sigma_2 =$

1.070466; ξ_3 和 ξ_4 是不可控的. 第一和第二可控主振型向量为

$$\overline{\varphi}_1=\Phi_0\begin{bmatrix}0.187592\\0.303531\\0.491123\\0.794654\end{bmatrix},\qquad \overline{\varphi}_2=\Phi_0\begin{bmatrix}0.794654\\-0.491123\\0.303531\\-1.87592\end{bmatrix}$$

下面对 C_0 进行 SVD 分解，得

$$U_0=\begin{bmatrix}-.408248 & .707107 & .577350\\-.408248 & -.707107 & .577350\\-.816496 & .000000 & -.577350\end{bmatrix}\qquad \Sigma_0=\mathrm{diag}(3.0,1.0)$$

$$V_0=\begin{bmatrix}-.408248 & .707107 & -.577350 & .000000\\-.408248 & -.707107 & -.577350 & .000000\\-.816497 & .000000 & .577350 & .000000\\.000000 & .000000 & .000000 & 1.00000\end{bmatrix}$$

再进行一次坐标变换，即令 $\eta=V\rho$, 实际相当于令 $x=\Phi_0V\rho$, 得 ρ 坐标下的观测方程为

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=U_0\begin{bmatrix}3.0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1.0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho_1\\\rho_2\\\rho_3\\\rho_4\end{bmatrix}$$

那么 J_0 可以写为

$$J_0=3^2\rho_1^2+\rho_2^2$$

显然， ρ_1 和 ρ_2 是可观的，它们对应的奇异值分别为 $\sigma_1=3.0,\sigma_2=1.0$, 而 ρ_3 和 ρ_4 是不可观的. 与 ρ_1 和 ρ_2 对应的可观主振型向量为

$$\psi_1=\Phi_0\begin{bmatrix}-0.408248\\-0.408248\\-0.816497\\0.00000\end{bmatrix},\qquad \psi_2=\Phi_0\begin{bmatrix}0.707107\\-0.707107\\0.000000\\0.000000\end{bmatrix}$$

参 考 文 献

1 Balas MJ. Trends in Large Space Structure Control Theory: Fondest Hopes, Wildest Dreams. IEEE Transactions on Automatic Control. 1982, 27(3): 522–535

2 Rao SS and Pan TS. Modeling, Control, and Design of Flexible Structures. A Survey, Applied Mechanics Review, 1990, 43(5): 99–117

3 胡海昌，陈德成，贺向东．固有频率集聚时处理振型的一个方法，固体力学学报， 1991, 12(1): 54–60

4 刘中生，陈塑寰．频率集聚时模态分析的移位摄动法，宇航学报， 1993(1): 81–88

5 Porter B and Crossley R. Modal Control Theory and Applications. 1972, Taylor & Francis Ltd

6 Laub AJ and Arnold WF. Controllability and Observability Criteria for Multivariable Linear Second—order Models, IEEE Transactions on Automatic Control. 1984, AC–29(2): 163–165

7 Hughes PC and Skelton RE. Controllabiliby and Observability of Linear Matrix Second—order Systems. ASME Journal of Applied Mechanics. 1982, 47: 415–420

8 Golub GH and Van Loan CF. Matrix Computations, Second Edition, The Johns Hopkins University Press. 1990

THE CONCEPT OF PRINCIPAL MODE SHAPES AND THE MEASURES OF CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY FOR MODE SHAPES WITH REPEATED FREQUENCIES

Liu Zhongsheng　　Wang Dajun　　Hu Haichang

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing* 100871, *China*)

Abstract　This paper studies how to measure the controllability and observability of vibration mode shapes with repeated frequencies and how to show clearly the structure of the subspace consisting of these mode shapes with repeated frequencies in terms of controllability and observability. Using singular value decomposition technique, a new set of mode shapes associated with this repeated frequency and the corresponding singular values has been found out. This new set of mode shapes, called the principal mode shapes, can clearly show the structure of this subspace in terms of controllability and observability, and the singular value associated with each principal mode shape can measure the controllability and observability of this principal mode shape. The method of this paper is of importance for vibration control of flexible space structures.

Key words　vibration control, controllability and observability, mode shapes with repeated frequencies, large space structures