

# 考虑翘曲效应的薄壁曲梁几何非线性分析

\*段海娟<sup>1</sup>, 张其林<sup>2</sup>

(1. 上海交通大学建筑工程与力学学院, 上海 200030; 2. 同济大学建筑工程系, 上海 200092)

**摘 要:** 利用 UL 法研究了开口薄壁曲线梁几何非线性分析问题。采用多项式插值函数表示位移场。考虑了翘曲自由度及曲率效应模拟开口薄壁曲梁的结构行为。所有位移参数定义于截面形心以便在弹性应变能中包括弯扭耦合项。利用修正的弧长法求解非线性方程, 跟踪荷载—位移曲线。用算例对提出的方法进行了验证, 表明了薄壁曲梁的分析中翘曲变形不可忽略。

**关键词:** 开口薄壁杆件; 曲梁; 翘曲扭转; 几何非线性分析; 有限元法

中图分类号: TU311 文献标识码: A

## EFFECT OF WARPING IN GEOMETRIC NONLINEAR ANALYSIS OF CURVED THIN-WALLED BEAMS

\*Duan Hai-juan<sup>1</sup>, ZHANG Qi-lin<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Mechanics Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China;

2. Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai, 200092, China)

**Abstract:** The geometric nonlinear analysis of curved beams with thin-walled open sections is performed. With the updated Lagrange formulation, a Hermitian polynomial is adopted to describe the displacement field. Warping degree of freedom and curvature effects are taken into consideration to simulate the structural behavior of curved thin-walled beams with open sections. In this formulation, all displacement parameters are defined at centroid axis so that the couple terms of bending and torsion are added to elastic strain energy. The improved arc-length method is adopted to trace the nonlinear load-deflection path. Numerical examples are presented to illustrate the validity and the accuracy of the proposed numerical approach. It is found that warping deformation is not negligible in the analysis of thin-walled beams.

**Key words:** thin-walled open section members; curved beams; warping torsion; geometric nonlinear analysis; finite element method

## 1 引言

开口薄壁杆件(如 W 型、I 字型和槽型等)具有良好的力学性能和较轻的自重, 广泛用于桥梁工程和房屋建筑工程中。准确计算其稳定极限对于薄壁结构的设计是至关重要的。与直线杆件相比, 曲线杆件其弯曲、扭转和翘曲的变形都是耦合的。Timoshenko 和 Gere<sup>[1]</sup>在忽略翘曲影响的条件下建立

了曲线杆件的弯扭理论。后来 Dabrowski<sup>[2]</sup>修正了这一理论, 并研究了闭口截面曲线杆件的变形。Yang 和 Kuo<sup>[3,4]</sup>提出了双对称薄壁开口曲线梁稳定行为的解析解。文献[5]利用文献[6]的翘曲位移表达式研究了双对称 I 字型梁的稳定性。而关于一般截面(包括对称和非对称截面)的曲线梁几何非线性分析的研究很少。本文基于固体力学有限变形理论和虚功原理, 考虑了翘曲和曲率效应、剪心和形心不重

合的影响,提出了一种开口薄壁曲线梁几何非线性分析的计算模型,并推导了相应的几何刚度矩阵。

## 2 几何非线性刚度方程的建立

### 2.1 基本假定

(1) 均质弹性材料; (2) 中面剪应变为零; (3) 大位移、小应变,在变形中横截面特性不变。

### 2.2 位移场

如图 1 所示的一般开口薄壁曲线梁,其横截面上任一点在  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的位移  $U = (U, V, W)$  可以表示为:

$$\begin{aligned} U &= u - v'y - (w' - \frac{u}{R})z - (q'_x + \frac{v'}{R})w \\ V &= v - q_x(z - z_0) \\ W &= w + q_x(y - y_0) \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $u, v, w$  分别为横截面形心处的  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向位移,  $y_0$  和  $z_0$  分别为剪心距形心的距离,  $q_x$  为横截面绕剪心的转角,  $R$  为形心轴曲率半径,  $w$  为横截面主扇性坐标。

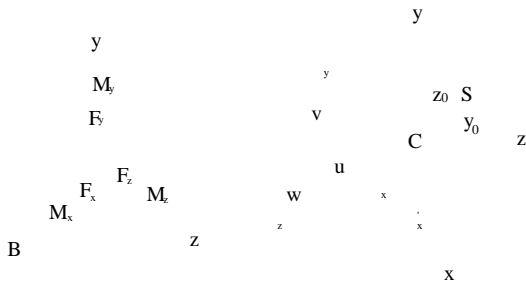


图 1 薄壁曲线梁单元

Fig.1 Curved thin-walled beam

### 2.3 应变-位移关系及内力

根据梁的有限变形理论,其应变的线性和非线性分量可用位移分别表示如下:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{W}{R} \\ 2e_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \\ 2e_{xz} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{U}{R} + \frac{\partial U}{\partial z} \\ h_{xx} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{W}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{U}{R} \right)^2 \right] \\ h_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{W}{R} \right) + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{U}{R} \right) \right] \\ h_{xz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{W}{R} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z} \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{U}{R} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

根据刚性平面假定,图 1 所表示薄壁曲线梁单

元的内力可以定义为:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_A \mathbf{s}_{xx} dA ; F_y = \int_A \mathbf{s}_{yx} dA \\ F_z &= \int_A \mathbf{s}_{zx} dA ; M_y = \int_A \mathbf{s}_{xx} z dA \\ M_x &= \int_A [\mathbf{s}_{zx} (y - y_0 - \frac{\partial w}{\partial z}) - \mathbf{s}_{yx} (z - z_0 - \frac{\partial w}{\partial y})] dA \\ M_z &= \int_A \mathbf{s}_{xx} y dA ; B = \int_A \mathbf{s}_{xx} w dA \end{aligned} \quad (3)$$

### 2.4 虚功方程

采用 Update Lagrange(UL)法,即所有变量都参考每一荷载步开始时的位形,一般连续体的虚功方程为:

$$\begin{aligned} &\int_{t_V} C_{ijkl} e_{kl} d e_{ij} dV + \int_{t_V} {}^t \mathbf{s}_{ij} d \mathbf{h}_{ij} dV \\ &= {}^{t+\Delta t} Q - \int_{t_V} {}^t \mathbf{s}_{ij} d e_{ij} dV \end{aligned} \quad (4)$$

对于梁单元,相应的虚功增量方程的左边第一、第二式可分别表示为:

$$\begin{aligned} P_E &= \int_{t_V} (Ee_{xx} d e_{xx} + 2Ge_{xy} d e_{xy} + 2Ge_{xz} d e_{xz}) dV \end{aligned} \quad (5a)$$

$$P_G = \int_{t_V} (\mathbf{s}_{xx} d \mathbf{h}_{xx} + 2\mathbf{s}_{xy} d \mathbf{h}_{xy} + 2\mathbf{s}_{xz} d \mathbf{h}_{xz}) dV \quad (5b)$$

将式(2)中前三式和后三式分别代入式(5a)和(5b)积分后可分别得:

$$\begin{aligned} P_E &= \frac{1}{2} \int_0^L [EAd(u' + \frac{w}{R})^2 + EI_y d(w'' - \frac{u'}{R})^2 \\ &+ EI_z d(v'' - \frac{q_x}{R})^2 + EI_w d(q_x'' + \frac{v''}{R})^2 \\ &+ GJd(q_x' + \frac{v'}{R})^2 + 2EI_{wy} d(w'' - \frac{u'}{R})(q_x'' + \frac{v''}{R}) \\ &+ 2EI_{wz} d(v'' - \frac{q_x}{R})(q_x'' + \frac{v''}{R}) \\ &+ 2EI_{yz} d(v'' - \frac{q_x}{R})(w'' - \frac{u'}{R})] dx \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} P_G &= \frac{1}{2} \int_0^L \{ F_x d[v'^2 + (w' - \frac{u}{R})^2 + (y_0^2 + z_0^2)q'^2] \\ &+ F_y d[q(w' - \frac{u}{R})] + F_z d(v'q) \\ &+ M_x d[(w' - \frac{u}{R})(v'' - \frac{q_x}{R}) - v'(w'' - \frac{u'}{R})] \\ &+ M_y d[\frac{1}{R}(w' - \frac{u}{R})^2 - 2v'q' - \frac{v'^2}{R}] \\ &+ M_z d[(q_x' + \frac{v'}{R})(w' - \frac{u}{R})] \\ &+ 2\frac{B}{R} d(w' - \frac{u}{R})(q_x + \frac{v'}{R}) + Kd(q_x' + \frac{v'}{R})^2 \} dx \end{aligned} \quad (6b)$$

式中  $K$  为瓦格纳系数:

$$K = \int_A \mathbf{s}_{xx} ((y - y_0)^2 + (z - z_0)^2) dA$$

以上的推导还利用了以下公式和假定：

$$A = \int_A dA \quad ; \quad I_y = \int_A z^2 dA \quad ; \quad I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad ; \quad I_w = \int_A w^2 dA \quad ; \quad I_{wy} = \int_A yw dA \quad ;$$

$$I_{wz} = \int_A zw dA \quad ; \quad w' + u R = 0$$

### 2.5 有限元刚度方程

图 1 所示薄壁曲线梁单元为两节点七自由度，采用多项式插值函数来表示形心轴的位移。因此位移  $u, v, w$  和  $q_x$  可以表示为：

$$u = [f_1][u_1 \quad u_2]^T$$

$$v = [f_2][v_1 \quad q_{z1} \quad v_2 \quad q_{z2}]^T$$

$$w = [f_2][w_1 \quad -q_{y1} \quad w_2 \quad -q_{y2}]^T$$

$$q_x = [f_2][q_{x1} \quad q'_{x1} \quad q_{x2} \quad q'_{x2}]^T$$

式中： $[f_1] = [1-x \quad x]$ ； $x = x/l$

$$[f_2] = [2x^3 - 3x^3 + 1 \quad (x^3 - 2x^3 + 1)l$$

$$-2x^2 + 3x^3 \quad (x^3 - x^2)l]$$

将式(7)代入式(6a)和式(6b)，再代入式(4)，沿单元长度方向积分，即可得到薄壁曲线梁单元的刚度方程：

$$(K_E + K_G)DU = P - F \tag{8}$$

式中：

$$DU = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad q_{x1} \quad q_{y1} \quad q_{z1}$$

$$q'_{x1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad q_{x2} \quad q_{y2} \quad q_{z2} \quad q'_{x2}]$$

$$P = [F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad M_{z1} \quad B_1$$

$$F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad M_{z2} \quad B_2]$$

$K_E$  和  $K_G$  分别为  $14 \times 14$  阶的单元弹性刚度矩阵和几何刚度矩阵。 $DU$  为单元节点位移增量向量， $P$  为外荷载向量， $F$  为节点内力向量。假定外荷载为比例加载， $P$  可以用  $IP_0$  表示， $P_0$  是参考荷载向量， $I$  是荷载参数。

### 3 求解

Kween<sup>[7]</sup>在研究组合圆柱壳的后屈曲分析时所提出了一种修正弧长法。第  $m$  荷载步的第  $(n+1)$  次迭代，方程(8)可以利用荷载参数  $DI^{n+1}$  写为：

$$K_T \cdot DU^{n+1} = DP(I^n) + DI^{n+1} \cdot P_0 \tag{9}$$

式中  $DP(I^n) = I^n P_0 - F^{n+1}$  表示第  $n$  次迭代后的不平衡力。

位移增量  $DU^{n+1}$  可分解为：

$$DU^{n+1} = DU^{n+1}(I^n) + DI^{n+1}U_m \tag{10}$$

式中， $DU^{n+1}(I^n) = K_T^{-1}DP(I^n)$ ， $U_m = K_T^{-1}P_0$

利用第  $m$  荷载步第  $n+1$  次迭代后的位移增量： $D_m U^{n+1} = D_m U^n + DU^{n+1}$  及位移约束方程： $D_m U^T D_m U = (DI)^2$  可以求出荷载参数：

$$DI^{n+1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{11}$$

式中：

$$A = U_m^T \cdot U_m \quad , \quad B = 2D_m U^n + (DU^{n+1}(I^n))^T \cdot U_m$$

$$C = (D_m U^n + DU^{n+1}(I^n))^T \cdot (D_m U^n + DU^{n+1}(I^n)) - DI^2$$

一般的弧长法取两个根中较大的作为加载参数。Kween<sup>[7]</sup>建议两根都舍弃，弧长和外载都自动减少一半，继续计算。

### 4 数值算例

算例 1：如图 2 所示，一  $45^\circ$  悬臂弯梁在自由端受一集中力作用。这个算例首先由 Bathe<sup>[8]</sup>用 8 个三维直线梁单元，划分为 60 个荷载步进行计算，计算结果表示为 ADINA<sup>1</sup>。后来 Bathe 又采用三维实体单元计算了这一算例，计算结果表示为 ADINA<sup>2</sup>。两种方法的计算结果非常吻合，因此这一结果被广泛接受。Chen<sup>[9]</sup>也分析了这一结构，其结果如表 1 中的 NACS<sup>1</sup> 和 NACS<sup>2</sup>，NACS<sup>1</sup> 和 NACS<sup>2</sup> 分别为每一荷载步中考虑和不考虑迭代的结果。Spillers<sup>[10]</sup>也给出了其计算结果，但与 Bathe 的结果相差较大。在本文中，将这一弯梁划分成 4 个相等的曲线单元，荷载分成 10 个荷载步。从表 1 可以看出本文的计算与 ADINA<sup>2</sup> 和 NACS<sup>2</sup> 非常接近。表明本单元模型的正确性和有效性，并且使用的单元数和荷载步很少。

表 1  $45^\circ$  悬臂弯梁自由端位移

Table 1 Displacement at the tip

	Load P=0lbs			Load P=300lbs			Load P=600lbs		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
ADINA <sup>1</sup>	70.7	0.0	29.3	59.2	39.5	22.5	47.2	53.4	15.9
ADINA <sup>2</sup>	70.7	0.0	29.3	58.5	40.4	22.2	46.8	53.6	15.7
NACS <sup>1</sup>	70.7	0.0	29.3	59.2	39.5	22.6	47.2	53.4	15.9
NACS <sup>2</sup>	70.7	0.0	29.3	58.6	40.3	22.3	46.7	53.6	15.7
Spillers	70.7	0.0	29.3	60.0	43.8	22.9	46.2	59.2	19.1
本文	70.7	0.0	29.3	58.6	40.4	22.2	47.0	53.5	15.7

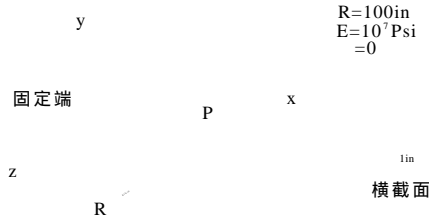


图 2 45° 悬臂弯梁

Fig.2 45° circular bend

算例 2：一横截面为工字型的悬臂圆弧弯梁，(横截面如图 3)在其自由端受一集中力作用。分别计算其弦长为固定值  $L=1990\text{mm}$  时，半径分别为  $R=1250\text{mm}$ 、 $2500\text{mm}$ 、 $5000\text{mm}$ ，考虑和不考虑翘曲效应其自由端的荷载-位移情况，计算结果如图 4 所示。由图 4 表明在弦长一定的条件下，半径越小，其几何非线性表现得越明显；翘曲效应随半径和荷载的增大而增大。

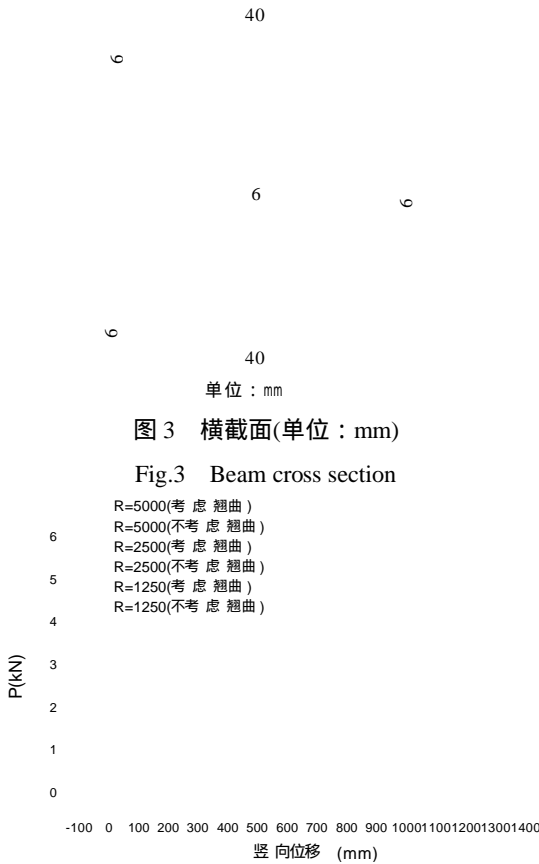


图 3 横截面(单位：mm)

Fig.3 Beam cross section

R=5000(考虑翘曲)  
 R=5000(不考虑翘曲)  
 R=2500(考虑翘曲)  
 R=2500(不考虑翘曲)  
 R=1250(考虑翘曲)  
 R=1250(不考虑翘曲)

图 4 自由端荷载-位移曲线

Fig.4 Load-displacement relation at free end

算例 3：研究一固支扁拱的突跃屈曲行为，分别计算有着相同抗弯刚度的矩形截面和工字型截面(如图 6)。拱顶荷载位移曲线如图 7 所示。图 7 表明相同抗弯刚度的实体截面和薄壁截面，它们的

结构行为相差非常大。

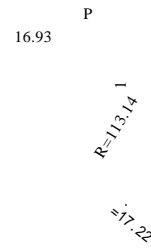


图 5 固支扁拱(单位：in)

Fig.5 Clamp-clamp shallow arch

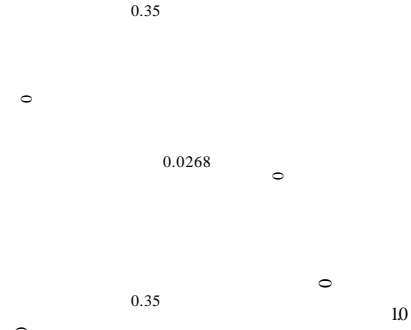


图 6 扁拱的两种横截面(单位：in)

Fig.6 Two cross sections of shallow arch

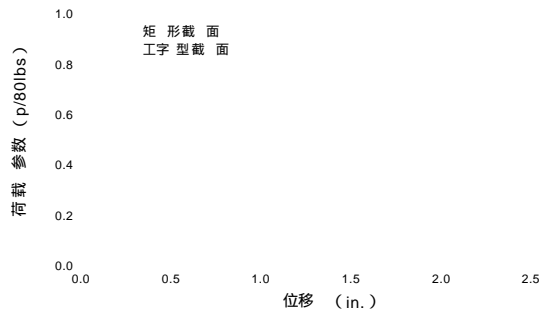


图 7 拱顶荷载位移-曲线

Fig.7 Load-displacement relation of vault

## 5 结论

本文建立一种薄壁曲线梁几何非线性分析的模型，在应变能中包括了翘曲效应、曲率效应和瓦格纳效应及弯扭耦合项。基于虚功原理建立了几何非线性分析的刚度方程，并采用修正的弧长法求解非线性方程组。最后算例表明了本文方法的正确性和有效性，在弦长一定的条件下，半径越小，其几何非线性表现得越明显；翘曲效应随半径和荷载的增大而增大。同时表明了薄壁曲梁的分析中翘曲变形不可忽略。

- carbon fiber sheet [D]. Tianjin: Tianjin University, 2001. (in Chinese)
- [7] 杨勇新, 岳清瑞, 胡云昌. 碳纤维布与混凝土粘结性能的试验研究[J]. 建筑结构学报, 2001, 22(3):36-42.  
Yang Yongxin, Yue Qingrui and Hu Yunchang. Experimental study of bonded performances between carbon fiber sheets(CFSs) and concrete[J]. Journal Building Structures, 2001, 22(3): 36-42. (in Chinese)
- [8] A Nanni, F Focacci, A Cobb. Proposed procedure for the design of rc flexural members strengthened with FRP sheets[C]. Second International Conference on Composites in Infrastructure, 1988. 187-201.
- [9] Z S Wu, H Yoshizawa. Analytical/experimental study on composite behavior in strengthening structures with bonded carbon fiber sheets[J]. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 1999, 18(12): 1131-1155.
- [10] T W White, K A Soudki, M A Erki. Analytical modeling of reinforced concrete beams strengthened with carbon fiber reinforced polymer laminates subjected to high strain rates[C]. Fourth International Symposium on Fiber Reinforced Polymer Reinforcement for Reinforced Concrete Structures (Selected Presentation Proceedings), (ACI), 1999. 181-194.

(上接 160 页)

#### 参考文献：

- [1] Timoshenko S P, Gere J M. Theory of elastic stability 2nd Ed.[M]. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [2] R Dabrowski. Curved thin-walled girders, theory and analysis[M]. Cement and concrete association, London, 1973.
- [3] Yeong Bin Yang and Shyh-Rong Kuo. Static stability of curved thin-walled beams[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1986, 117(8): 821-841.
- [4] Yeong Bin Yang and Shyh-Rong Kuo. Curved beam element for nonlinear analysis[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1989, 115(3): 840-855.
- [5] 王金明, 顾海涛. I型截面薄壁圆弧曲梁的稳定性分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2000, 21(6): 57-63.  
Wang Jiming, Gu Haitao. Stability analysis of curved thin-walled beams with I-section [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2000, 21(6): 57-63. (in Chinese)
- [6] 许钧陶, 童根树. 任意开口薄壁截面圆弧曲梁弯扭精确分析[J]. 建筑结构学报, 1997, 18(3): 22-28.  
Xu Juntao, Tong Genshu. Exact analysis of curved beams with arbitrary thin-walled open section [J]. Journal of Building Structures, 1997, 18(3): 22-28. (in Chinese)
- [7] Kweon JH, Hong CS. An improved arc-length method for post buckling analysis of composite cylindrical panels[J]. Computer and Structures, 1994, 53: 541-549.
- [8] Bathe KJ, Bolourchi S. Large displacement analysis of three-dimension beam structures[J]. International Journal of Numerical Method in Engineering, 1979, 14: 961-986.
- [9] Chen ZQ, Agar TJA. Geometric nonlinear analysis of flexible spatial beam structures[J]. Computer and Structures, 1993, 49(6): 1083-1094.
- [10] Spillers WR. Geometric stiffness matrix for space frame[J]. Computer and Structures, 1990, 36(1): 29-37.