于振善尺算法的理論基礎

趙 訪 熊

(清華大學數學系)

于振善同志是一位木匠師父。他只受過相當於三年小學的教育。十年來他利用並不很多的業餘時間來研究速算的技術，發明了"于振善尺算法"。于振善尺算法包含了兩種不同而有聯帶關係的發明。第一種叫做尺算器；第二種就是工程師們常用的對數算尺。關於尺算法的詳細發明過程，可看于同志自著的"于振善尺算法"（商務，即將出版）。本文的目的僅在說明于振善尺算法的理論基礎。

于振善尺算法是算術與幾何的結合品。算尺是算術與直線歐氏幾何的結合品，尺算器則是算術與平面歐氏幾何的結合品。給定一個距離單位後，用一根普通的尺量一量，一個距離就可以用一個數字來代表；任何一個數字也可以用一個距離來代表。

抽象的數字與具體的距離已經結合起來了。用尺量出一個距離就等於用算術算出一個數字。算術與幾何是可以結合的。問題在怎樣結合使較難的算術問題變成比較容易的幾何問題。這就是于振善同志所研究的問題。

1. 算尺

直線上的歐氏幾何，就是保持距離爲不變量的幾何，只有一種變換，就是一元移動：

$$X'=X+C$$

其中X、X'、及常數C都代表直線上的距離，X及X'是對應點。

于振善同志把兩根木匠用的尺，緊靠着推來推去，就發現了這就是加減法的算尺。任何算尺的唯一的功用，不論算尺上刻的度數如何複雜，就是算尺上距離的加減，所以算尺基本上是加減算尺上距離的工具。假設算尺上兩根緊靠着的尺是同正向的兩根同樣的等分尺，例如兩根木匠尺，兩根裁尺，或兩根米突尺，那末這根算尺能計算的問題是下例數字的加減問題：

$$X'=X+C$$

$$\text{或}\quad X'-X=Y'-Y=C \quad (1)$$

其中對應點X及X'，Y及Y'，是正對點。

數字的加減問題是算術裏的最簡單的運算，在算盤上計算並不太難而且準確，所以加減法的算尺是沒有廣大市場的。

2. 尺算器

把一塊長方形木板鋸成寬度滿足給定比例的兩塊長方板是一個實際木工問題，也是算術裏的一個比例問題。假設這塊木板寬六寸，要分成寬度是三比四的兩塊長方板，怎樣分呢？

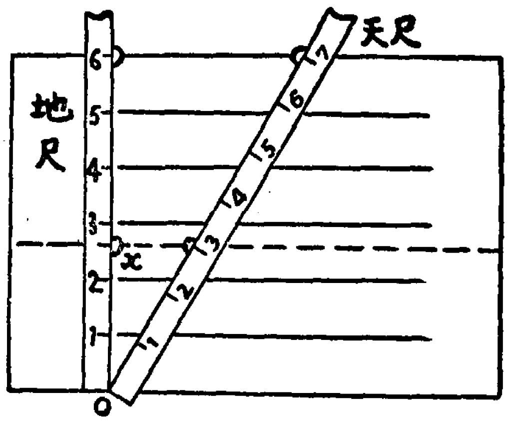

圖1 尺算器

于振善同志的方法是把木匠尺斜放在這塊木板上，尺的起點靠着下面長邊，尺的3+4=7寸處靠着上面長邊，用鉛筆在尺邊三寸處在木板上點一點。這樣叫做作一次斜分。作兩次斜分，就可定出一條與長邊平行的直線，分這塊木板爲寬度爲三比四的兩塊長方板了。

令X代表下面一塊長方板的寬度，那末：

$$\frac{X}{3}=\frac{6}{7}$$

$$X=\frac{3\times 6}{7}=\frac{18}{7}=2.57^{+}$$

拿木匠尺去量出下面一塊長方板的寬度，就不必計算這個比例題了。預先在木板寬邊上釘上一根木匠尺就省去了臨時去量的工作。預先在木板上畫好與長邊平行的許多平行線，又可省去一次斜分及臨時畫線的工作。作此兩種改進後，這塊釘上木匠尺畫好平行線的木板，叫做“地尺”，及木板上放着的活動木匠尺，叫做“天尺”，組成于振善發明的計算比例問題的尺算器。尺算器可以很快地計算距離比例問題。比例包含乘除，所以尺算器也可以計算距離的乘除問題。

注意尺算器的天尺，地尺上的固定尺，及與此題有關的兩條平行線定出兩個相似三角形。尺算器的理論基礎就是初等幾何關於距離比例的下列簡單定理：

定理：兩個相似三角形的對應邊邊長的比例是一個常數。

3. 對數算尺

算尺可以加減距離，尺算器可以乘除距離。怎樣可以使算尺計算數字的乘除是于振善同志想解決的問題。

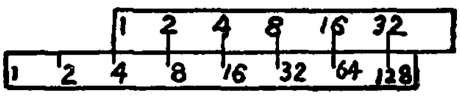

圖 2

在木匠尺原點處寫度數 $1=2^0$；一寸處寫度數 $2=2^1$；二寸處寫度數 $4=2^2$；三寸處寫度數 $8=2^3$；…，即得一根新的尺，于同志把它叫做“等比尺”。把兩根同樣的等比尺緊靠着推來推去，就可解決 2^m 及 2^n，n及m爲零或正整數，兩個數的乘除問題。這兩根等比尺組成的算尺其實就是一根尚未完成的對數算尺。怎樣完成這根對數算尺是于同志要解決的問題。

化乘除爲加減需要對數函數。于同志那時沒有學過代數和三角，所以也沒有看見過對數表，而必需自己發明對數表。于同志已發明的尺算器可以很快地計算乘除，所以他能很快地計算出倒數。于同志做好了自 $X_1=1.01$，$X_2=1.02$，… 到 $X_{100}=2.00$ 的倒數表，就是 $\frac{1}{X_K}$ 的表。他再把倒數表的數列一個一個地，加流水賬似地，加起來，將每次的總和另寫成一個數列 S_K，$X_K=1+\frac{K}{100}$ 對面的 S_K 就是：

$$S_K=\sum_{e=1}^{K}\frac{1}{1+\frac{e}{100}}$$

這個數被一百除後就差不多是 X_K 的自然對數 $\log X_K$。

學過微積分的讀者一定知道自然對數 $\log X_K$ 就是下列定積分：

$$\log X_K=\int_1^{X_K}\frac{dX}{X}$$

這個定積分可以解釋成 $Y=\frac{1}{X}$。單調下降曲線下，X軸上，X=1直線右，$X=X_K$ 直線左的平面區的面積。用與Y軸平行的 (K+1) 條直線 $X=1$，$X=1.01$，…$X=X_K$，分此平面區爲K個長條，用剪刀剪去每條上面尖端使成長方條，則這K個長方條的總面積就是于同志所算出來的 S_K 的百分之一。$\frac{1}{100}S_K$ 是 $\log X_K$ 的一個近似值，較 $\log S_K$ 稍小，因爲剪去了每條的尖端，不過絕對誤差不超過：

$$\frac{1}{200}\left[1-\frac{1}{1+\frac{K}{100}}\right]=\frac{K}{200(100+K)}$$

當 X=100 時絕對誤差，也不超過四百分之一。于同志利用這個表刻成他的對數算尺。

4. 尺算器與算尺的比較

$X=\log t$ 是 t 的函數。對數尺是一種函數尺。設在離原點距離爲 $X=f(t)$ 處，t=1,2,…1.1, 1.2，作度線並註明度數，t，即得 f(t) 函數尺。例如在工程師們用的算尺上，除單位不同的對數尺外，還有 log Sin t 尺，log tan t 尺，log log t 尺等。

假設算尺的固定地尺上有原點及單位點正對的兩根函數尺，$f_1(t_1)$ 尺及 $f_2(t_2)$ 尺，活動的天尺上有原點及單位點正對的兩根函數尺，$f_3(t_3)$ 尺及 $f_4(t_4)$ 尺。天地尺的正向及單位距離相同。利用跑標使度數 t_1 正對着度數 t_3，設度數 t_2 正對着度數 t_4，那末這四個度數 t_1, t_2, t_3, t_4 就滿足下列函數的加減關係：

$$f_1(t_1)-f_2(t_2)=f_3(t_3)-f_4(t_4)\quad (I)$$

這是算尺能計算的最廣函數關係。

假設尺算器的固定的地尺上有原點及單位點

正對的兩根函數尺，$F_1(t_1)$尺及 $F_2(t_2)$尺，並有垂直於這兩根平行尺的紅綠兩族平行線，紅的代表t_1，綠的代表t_2，以免混亂。假設尺算器的天尺是有一條刻線的透明尺，刻線的一邊刻了$F_3(t_3)$尺，一邊刻了原點及單位點相同的 $F_4(t_4)$尺。天地尺的正向及單位不必相同。使天尺及地尺的原點正對，再轉動天尺使天尺上的度數t_3正對地尺的度數t_1，看出天尺上度數t_4正對着地尺上的度數t_2，那末這四個度數t_1，t_2，$t_3 t_4$ 就滿足下列函數的比例關係：

$$\frac{F_1(t_1)}{F_2(t_2)}=\frac{F_3(t_3)}{F_4(t_4)} \qquad \text{(II)}$$

這是尺算器能計算的最廣函數關係。

求(II)的對數即得：

$$\log F_1(t_1)-\log F_2(t_2)=\log F_3(t_3)-\log F_4(t_4) \qquad \text{(I')}$$

(I')與(I)是同一類型的算式。求(I) 的指數函數即得：

$$\frac{e^{f_1(t_1)}}{e^{f_2(t_2)}}=\frac{e^{f_3(t_3)}}{e^{f_4(t_4)}} \qquad \text{(II')}$$

(II')與(II)也是同一類型的算式。所以算尺與尺算器的功能是絕對相同的。尺算器能算的問題，算尺也能算，算尺能算的問題，尺算器也能算。

尺算器的優點在所用的函數尺通常比較計算同一問題的算尺的函數尺簡單。例如計算乘除時，尺算器的天地尺都是等分尺而算尺上的天地尺都是對數尺，計算複利時，尺算器的天地尺是一根等分尺，一根對數尺，而算尺上的天地尺是一根對數尺，一根對數的對數尺。當然也有例外，例如

$$e^z=e^x e^y$$

就是 $$Z=X+Y$$

解決這個問題當然用算尺比較容易。不過這種例外是不常遇見的。

算尺的優點在携帶方便，應用也方便。算尺上的函數尺可以用機器刻得很細很準，用跑標上很細的刻線定數字也可以定得很準確。尺算器改造後也可提高準確度(參考拙作"速算幾何"，自然科學第四期)，不過總比精刻的算尺差些。所以爲一個經常用的算學公式定刻一根算尺是值得的。

于振善的尺算器是算術與平面幾何的一個很美滿很有用的結合品。在中學講幾何或代數時應當介紹及應用，不但結合愛國主義，而且可以提高學習興趣及情緒，發揚我國勞動人民的高度智慧及創造力。

科學界人士歡迎蘇、匈科學家

中華全國科學技術普及協會，中華全國自然科學專門學會聯合會及中國科學院今日下午聯合舉行茶會，招待參加我國國慶節的各國人民觀禮代表團中的科學工作者。應邀出席的有蘇聯政治與科學知識普及協會主席奧巴林，蘇聯烏茲貝克科學院化學研究所所長尤努索夫，匈牙利科學院院長伊斯特萬・魯斯尼亞克三人。出席招待的，有中華全國科學技術普及協會主席梁希，副主席茅以昇，中華全國自然科學專門學會聯合會副主席吳有訓，中國科學院副院長陶孟和及中國科學工作者30餘人。

梁希首先代表中國科學工作者熱烈歡迎到會的蘇聯及匈牙利科學工作者，接着作了關於二年來中國科學普及工作的簡短報告。

蘇聯代表奧巴林起立發言，詳盡地介紹了蘇聯政治與科學知識普及協會成立四年來的工作及經驗。匈牙利代表伊斯特萬・魯斯尼亞克在發言時，介紹了解放後的匈牙利科學工作者如何在匈牙利工人階級的幫助下恢復了科學研究工作並進行普及科學的工作。蘇聯代表尤努索夫生動地描述了烏茲貝克的科學工作者工作的情況。最後，由蘇聯代表奧巴林回答了參加茶會的科學工作者所提出的有關科學普及工作的幾個問題。茶會結束後並舉行宴會；席間賓主一再爲中蘇，中匈的科學工作者的團結合作共同保衛世界和平而乾杯。

(新華社稿 10月7日)