文章编号: 1000 - 2243(2009)02 - 0180 - 04

完全图和完全多部图的 Mycielski图的星全染色

李沐春[1], 强会英[1], 张忠辅[1,2]

(1. 兰州交通大学数理与软件工程学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 西北师范大学数学与信息科学学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 讨论了完全二部图、完全图和完全多部图的 Mycielski图的星全染色问题, 得到了它的星全色数.

关键词: 完全图; 完全多部图; Mycielski图; 星全色数

中图分类号: O157. 5 **文献标识码**: A

On the star total chromatic number of Mycielski's graphs of complete graphs and complete - partite graphs

LI Mu - chun[1], QIANG Hui - ying[1], ZHANG Zhong - fu[1,2]

(1. College of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, Gansu 730070, China; 2. College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou, Gansu 730070, China)

Abstract: In this paper, we searched the star total chromatic numbers of Mycielski's graphs of complete bipartite graphs, complete graphs and complete multipartite graphs with equipotent parts and obtained the star total chromatic numbers

Keywords: complete graph; complete - partite graph; Mycielski's graph; star total chromatic number

图的染色问题在实际中有广泛的应用[1-9], 计算机科学、通讯网络等实际问题中都会遇到可转化为星全染色的问题. Mycielski图是一类应用较广泛的图. 本文讨论完全二部图 $K_{m,n}$、完全图 K_n 和完全等 r 部图 $Q(r, n)$的 Mycielski图的星全色数.

定义 1[1] 对图 G, 图 G的 Mycielski图 $M(G)$定义为:

$$V(M(G)) = V(G) \cup V' \cup \{w\}$$

$$E(M(G)) = E(G) \cup \{uv' \mid u \in V(G), v' \in V', uv \in E(G)\} \cup \{wv' \mid v' \in V'\}$$

其中: $V' = \{v' \mid v \in V(G)\}$, $\{w\} \cap (V(G) \cup V') = \Phi$.

定义 2[6] 图 G的一个 k-正常全着色叫做 k-星全着色 (简记作 k - STC), 如果图 G的任何长为 2的路上的点和边的着色均不相同, 而 $\chi_{st}(G) = \min\{k \mid G有\ k - STC\}$称为 G的星全色数.

由定义 2显然有: 对任意一个简单的图 G, 有

$$2\Delta(G) + 1 \le \chi_{st}(G) \le n + \chi'(G)$$

其中: $n = |V(G)|$, $\Delta(G)$是图 G的最大度, $\chi'(G)$是图 G的边色数.

问题[6] 对简单图 $G(V, E)$, 当 G的围长 $g(G) \ge 7$时, 那些图的星全色数为 $\chi_{st}(G) \le 3\Delta(G)$.

记完全二部图为 $K_{m,n}$, 未加说明的术语见文献 [7]和 [9].

1 主要结果

引理 1[7] 对完全二部图 $K_{m,n}$, 当 $n \ge m \ge 1$时, 有 $\chi'(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n}) = n$.

引理 2[6] 若图 H是图 G的子图, 则有 $\chi_{st}(H) \le \chi_{st}(G)$.

引理 3[6] 若图 G的直径 $D(G) \le 2$, 则对 G的任意星全染色 f, 均有 $f(v) \ne f(u)$, 这里 $\forall u, v \in$

收稿日期: 2008 - 07 - 26

作者简介: 李沐春 (1965 -), 女, 副教授.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10771091); 甘肃省教育厅科研资助项目 (0604 - 05)

$V(G)$ $(u \neq v)$.

引理 4[7]　当 $n \geq 3$时, 完全图 K_n的边色数 $\chi'(K_n) = \begin{cases} n & (n \equiv 1(\mathrm{mod}2)) \\ n-1 & (n \equiv 0(\mathrm{mod}2)) \end{cases}$

引理 5[8]　每部分有 n个点的完全等 r部图记为 $Q(r, n)$, 当 $n \geq 2$, $r \geq 2$时, 其边色数为:

$$\chi'(Q(r, n)) = \begin{cases} (r-1)n+1 & (nr \equiv 1(\mathrm{mod}2)) \\ (r-1)n & (nr \equiv 0(\mathrm{mod}2)) \end{cases}$$

定理 1　当 $n > 1$时, 有 $\chi_{st}(M(K_{1,n})) = 4n+1$.

证明　由于图 $K_{1,n} = S_n$, 图 $K_{1,n}$的最大度 $\Delta(K_{1,n}) = n$, 而 $\Delta(M(K_{1,n})) = 2n$. 记点集: $V(K_{1,n}) = \{v_i \mid i = 0, 1, 2, \cdots, n\}$, $V(M(K_{1,n})) = \{v_0, v_1, \cdots, v_n; v'_0, v'_1, \cdots, v'_n; w\}$, 由定义 2知, $M(K_{1,n})$的星全色数 $\chi_{st}(M(K_{1,n})) \geq 2\Delta(M(K_{1,n})) + 1 = 4n+1$.

下证 $\chi_{st}(M(K_{1,n})) = 4n+1$, 为此只需给出图 $M(K_{1,n})$的 $(4n+1)$ - STC. 如下定义一个从 $V(M(K_{1,n})) \cup E(M(K_{1,n}))$到$\{1, 2, \cdots, 4n+1\}$的映射:

$$f(v_i) = i+1,\ i = 0, 1, 2, \cdots, n; \quad f(v'_0) = 3n+1$$
$$f(v'_i) = n+i+1,\ i = 1, 2, \cdots, n; \quad f(w) = 4n+1$$
$$f(v_0v_i) = 3n+i+1,\ i = 1, 2, \cdots, n; \quad f(v_0v'_i) = 2n+i+1,\ i = 1, 2, \cdots, n$$
$$f(v_iv'_0) = 2n+i,\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n; \quad f(v'_iw) = i+1,\ i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

易见, f为图 $M(K_{1,n})$的 $(4n+1)$ - 星全染色法.

定理 2　对完全二部图 $K_{m,n}$当 $n \geq m > 1$时, 其 Mycielski图 $M(K_{m,n})$的星全色数为 $\chi_{st}(M(K_{m,n})) = 4n+m$.

证明　当 $n \geq m > 1$时, 完全二部图 $K_{m,n}$的点集记为:

$$V(K_{m,n}) = \{v_i \mid i = 1, 2, \cdots, m, m+1, m+2, \cdots, m+n)\}$$
$$V(M(K_{m,n})) = \{v_i \mid i = 1, 2, \cdots, m, m+1, m+2, \cdots, m+n\} \cup \{v'_i \mid i = 1, 2, \cdots, m, m+1, m+2, \cdots, m+n\} \cup \{w\}$$

下证 $\chi_{st}(M(K_{m,n})) \geq 4n+m$.

1) 因为图 $M(K_{m,n})$的直径 $D(M(K_{m,n})) = 2$, 由引理 3及星全染色的定义知, 图 $M(K_{m,n})$中的所有点均染色不同, 所以至少用 $2(m+n)+1$种色对 $M(K_{m,n})$进行点染色.

2) 对图 $K_{m,n}$中的边进行染色时, 由引理 1知, 至少用 n种色即可, 但由定义知, 点 w所用的一种色可用到图 $K_{m,n}$中的边染色上, 故图 $K_{m,n}$中的边染色还需再添加 $n-1$种新颜色即可.

3) 对点 v_i与点 $v'_j(i, j = 1, 2, \cdots, m+n)$之间的边, 由于与点 $v_i(i = 1, 2, \cdots, m)$关联的边和与点 $v_j(j = m+1, m+2, \cdots, m+n)$关联的边均不相邻, 故点 $v'_j(j = m+1, m+2, \cdots, m+n)$上用过的色, 可用来对点 $v_i(i = m+1, m+2, \cdots, m+n)$与点 $v'_l(l = 1, 2, \cdots, m)$之间的边进行正常染色. 而点 $v_i(i = 1, 2, \cdots, m)$与点 $v'_j(j = m+1, m+2, \cdots, m+n)$之间的边, 除可用点 $v'_s(s = 1, 2, \cdots, m)$上用过的 m种色外, 还需另补充 $n-m$种新颜色. 因此, $\chi_{st}(M(K_{m,n})) \geq [2(m+n)+1] + (n-1) + (n-m) = 4n+m$.

为证 $\chi_{st}(M(K_{m,n})) = 4n+m$, 只需给出图$M(K_{m,n})$的 $(4n+m)$ - STC. 设所用 $4n+m$种色为$\{1, 2, 3, \cdots, 4n+m\}$. 先用$\{1, 2, 3, \cdots, 2n+2m+1\}$对所有顶点染色, 使得不同的顶点接受不同的颜色. 这时每个点的色即已确定. 由于 $K_{m,n}$的最大度为 n, 故用点 w的色以及 $2m+2n+1+1, 2m+2n+1+2, \cdots, 2m+2n+1+n$共 n种色对 $K_{m,n}$的边进行正常去染.

边集$\{v_iv'_j \mid i = m+1, m+2, \cdots, m+n; j = 1, 2, \cdots, m\}$所导出的子图是最大度为 n的二分图, 该子图的边用点 $v'_{m+1}, v'_{m+2}, \cdots, v'_{m+n}$的色正常去染.

边集$\{v_iv'_j \mid i = 1, 2, \cdots, m; j = m+1, m+2, \cdots, m+n\}$所导出的子图是最大度为 n的二分图, 该子图的边用点 $v'_1, v'_2, \cdots, v'_m$的颜色以及颜色 $2m+3n+1, 2m+3n+2, \cdots, 2m+3n+(n-m)$的色正常染色.

最后, 将点 $v_1, v_2, \cdots, v_m$的色依次分配给边 $v'_1w, v'_2w, \cdots, v'_mw$上, 将点 $v_{m+1}, v_{m+2}, \cdots, v_{m+n}$的色依

次分配给边 $v'_{m+1}w$, $v'_{m+2}w$, …, $v'_{m+n}w$上, 易看出最后所得的染色是 $M(K_{m,n})$的 $(4n+m)$ - 星全染色. 定理得证.

定理 3 当 $n \geq 3$时, K_n的 Mycielski图 $M(K_n)$的星全色数为:

$$\chi_{st}(M(K_n)) = \begin{cases} 4n-2 & (n \equiv 1 \pmod 2) \\ 4n-3 & (n \equiv 0 \pmod 2) \end{cases}$$

证明 当 $n \geq 3$时, 完全图 K_n与图 $M(K_n)$的点集分别记为:

$$V(K_n) = \{v_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$$

$$V(M(K_n)) = \{v_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{v'_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{w\}$$

图 $M(K_n)$的最大度 $\Delta(M(K_n)) = 2(n-1)$, 由定义 2知, $M(K_n)$的星全色数 $\chi_{st}(M(K_n)) \geq 2\Delta + 1 = 4n - 3$. 下面分 2种情况给出 $M(K_n)$的星全色数.

情况 1: 当 $n \equiv 1 \pmod 2$时.

1) 因为图 $M(K_n)$的直径 $D(M(K_n)) = 2$, 由引理 3及星全染色的定义知, 图 $M(K_n)$中的所有点均染色不同, 所以至少用 $2n+1$种色对 $M(K_n)$进行点染色.

2) 对图 K_n中的边进行染色时, 由引理 4知, 至少用 n种色即可. 又因点 w所用的一种色可用到图 K_n中的边染色上, 故图 K_n中的边染色还需再添加 $n-1$种新颜色.

3) 边集 $\{v_i v'_j \mid i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j\}$所导出的图, 可看成一个完全等二部图去掉一个完美匹配之后得到的图, 由引理 1知边色数为 $n-1$种色. 又因:

$$f(v_i v'_{i+1}) = f(v'_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$f(v_n v'_1) = f(v'_n)$$

这样, 在上述完全等二部图中又去掉了一个完美匹配, 所以点 v_i与点 $v'_j(i, j, = 1, 2, \cdots, n)$之间剩余的边还需另补充 $n-2$种新颜色.

4) 点 $v'_j(j = 1, 2, \cdots, n)$与点 w之间的边, 可用点 v_j的 n色去染.

由上述 4条原因知, 此时 $\chi_{st}(M(K_n)) = (2n+1) + (n-1) + (n-2) = 4n-2$.

情况 2: 当 $n \equiv 0 \pmod 2$时.

1) 图 $M(K_n)$的直径 $D(M(K_n)) = 2$, 同理于情况 1, 至少用 $2n+1$种色对 $M(K_n)$进行点染色.

2) 对图 K_n中的边进行着色时, 由引理 4知, 至少用 $n-1$种色即可, 又因点 w所用的一种色可用到图 K_n中的边染色上, 故图 K_n中的边染色只需再添加 $n-2$种新颜色.

3) 对点 v_i与点 $v'_j(i, j = 1, 2, \cdots, n)$之间的边染色, 同理于情况 1中 3), 只需另补充 $n-2$种新颜色即可.

4) 点 $v'_j(j = 1, 2, \cdots, n)$与点 w之间的边, 可用点 v_j的 n色去染.

因此, $\chi_{st}(M(K_n)) = (2n+1) + (n-2) + (n-2) = 4n-3$, 故命题成立.

定理 4 当 $r \geq 3$, $n \geq 2$时, 图 $Q(r, n)$的 Mycielski图 $M(Q(r, n))$的星全色数为:

$$\chi_{st}(M(Q(r, n))) = \begin{cases} (4r-3)n+1 & (m \equiv 1 \pmod 2) \\ (4r-3)n & (m \equiv 0 \pmod 2) \end{cases}$$

证明 易见, $Q(r, 1) = K_r$, $Q(2, n) = K_{n,n}$, 上述定理 2和定理 3已给出其星全色数, $\chi_{st}(M(Q(2, n))) = 5n$.

记图 $M(Q(r, n))$的点集和边集分别为:

$$V(M(Q(r, n))) = \{v_{ij} \mid i = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{v'_{ij} \mid i = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{w\}$$

$$E(M(Q(r, n))) = \{v_{ij}v'_{kl} \mid i \neq k, i, k = 1, 2, \cdots, r; j, l = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{v_{ij}v'_{kl} \mid i \neq k, i, k = 1, 2, \cdots, r; j, l = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{v'_{ij}w\}$$

当 $r \geq 3$, $n \geq 2$时, 分 2种情况考虑:

情况 1: 当 $m \equiv 0 \pmod 2$时, 先证明 $\chi_{st}(M(Q(r, n))) \geq (4r-3)n$.

1) 易见, 图 $M(Q(r, n))$的直径 $D(M(Q(r, n))) = 2$, 由引理 3及星全染色的定义知, 图 $M(Q(r, n))$

中的所有点均染色不同, 所以至少用 $(2m+1)$ 种色进行点染色.

2) 图 $Q(r, n)$ 中的边只能染成异于 $V(M((Q(r, n))) - \{w\}$ 中点的色, 由引理 5知, 至少用 $(r-1)n$ 种色对 $Q(r, n)$ 中边正常染色, 又因点 w所用的一种色可用到图 $Q(r, n)$ 中的边着色上, 故图 $Q(r, n)$ 中的边着色还需再另添加 $(r-1)n-1$种新颜色.

3) 对 $s \in \{1, 2, \cdots, r\}$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 每个点 v'_{si}的色可用来染边集 $\{v_{sk}v'_{jl} \mid s, j = 1, 2, \cdots, r, j \neq s; k, l = 1, 2, \cdots, n\}$ 中的某些边, 但 v'_{si}的色最多可染该边集中的 n条边, 因而边集 $\{v_{tk}v'_{jl} \mid t, j = 1, 2, \cdots, r, j \neq t; k, l = 1, 2, \cdots, n\}$ 中的最多 m^2 条边可用点的颜色去染, 尚剩 $m^2(r-1) - m^2 = r^2n^2 - 2m^2$ 条边必须用新的颜色去染. 最节约颜色的办法是让这 $r^2n^2 - 2m^2$ 条边所导出的子图的最大度尽可能的小. 而让 $v'_{i1}, v'_{i2}, \cdots, v'_{in}$ 的色正常的染边集 $\{v_{ij}v'_{(i+1)l} \mid j, l = 1, 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, r\}$ 中的边 (因该边集所导出子图是最大度为 n的二分图), 注意, 我们约定 $v_{rj}v'_{r+1, l} = v_{rj}v'_{1l}$. 这时, 这些边集被删掉后所剩下的边所导出的子图为 $(r-2)n$正则的, 故尚需 $(r-2)n$种新颜色去染.

4) r部分中每组点 $v'_{kj}(k = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, n)$ 与点 w之间的边, 可用原图 $Q(r, n)$ 中点 v_{kj} 上所用过的色去染.

由上述 4条原因知, 此时 $\chi_{st}(M(Q(r, n)) \geq (2m+1) + [(r-1)n-1] + (r-2)n = (4r-3)n$.

同样, 由上述叙述很容易给出 $M(Q(r, n))$ 的使用了 $(4r-3)n$种色的星全染色. 故 $\chi_{st}(M(Q(r, n)) = (4r-3)n$.

情况 2: 当 $m \equiv 1 \pmod 2$ 时, 先证明 $\chi_{st}(M(Q(r, n))) \geq (4r-3)n+1$.

1) 同情况 1, 图 $M(Q(r, n))$ 中的所有点均染色不同, 所以至少用 $(2m+1)$ 种色进行点染色.

2) 图 $Q(r, n)$ 中的边, 除可用点 w所用的一种色外, 由引理 5知, 还需再另添加 $(r-1)n$种色即可.

3) 同情况 1, 剩余的边只需再补充 $(r-2)n$种新颜色去染色即可满足要求.

易见, $\chi_{st}(M(Q(r, n)) = (2m+1) + (r-1)n + (r-2)n = (4r-3)n+1$.

参考文献:

[1] Chang G J, Huang L, Zhu X. Circular chromatic number of Mycielski's graphs[J]. Discrete Math, 1999, 205: 23 - 37.
[2] 张忠辅, 陈祥恩, 李敬文. 关于图的邻点可区别全染色 [J]. 中国科学: A辑, 2004, 34(5): 574 - 583.
[3] 张忠辅, 孙良. 图的 n全着色 [J]. 数学年刊: A辑, 1992, 13(1): 70 - 75.
[4] 张忠辅, 李敬文, 陈祥恩, 等. 图的距离不大于 β的任意的点可区别的边染色 [J]. 数学学报, 2006, 49(3): 703 - 708.
[5] 侯剑萍. 关于路 P_n和圈 C_n的幂图的消圈数 [J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2007, 35(6): 808 - 810.
[6] 张忠辅, 李敬文, 姚兵, 等. 图的星全染色 [EB/OL]. [2004—07 - 24]. http://202.201.18.40:8080/mas5/.
[7] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. New York: The Macmillan Press, 1976.
[8] 叶 H P. 图论中的若干问题 [M]. 姚兵, 顾同新, 张建勋译. 合肥: 中国科技大学出版社, 1992.
[9] 李沐春, 强会英, 晁福刚, 等. 完全二部图广义 Mycielski图的邻点可区别全色数与邻强边色数 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(19): 147 - 152.

(责任编辑: 杨 青)