

文章编号: 1000-4750(2011)12-0166-07

斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载计算方法

*刘爱荣, 申富林, 邝钜滔, 张俊平, 禹奇才

(广州大学土木工程学院, 广州 510006)

摘 要: 该文以近年来发展起来的一种新型空间拱桥——斜靠式拱桥拱肋系为研究对象, 基于最小势能原理, 综合考虑斜靠式拱肋系主拱肋、稳定拱肋、主拱肋与稳定拱肋间横撑的变形能、作用于拱肋系的外力势能, 首次推导出了斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载的解析解, 提出了斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载的计算方法, 并通过与有限元计算结果比较, 证明了该文所提出计算方法的正确性。在此基础上研究了稳定拱肋倾角变化、及其侧向抗弯和抗扭刚度, 主拱肋与稳定拱肋间横撑抗弯刚度对临界荷载的影响, 研究结果表明稳定拱肋倾角和侧向抗弯刚度是控制斜靠式拱桥侧向稳定性的主要因素。

关键词: 斜靠式拱肋系; 侧向稳定; 临界荷载; 能量; 稳定拱肋

中图分类号: TU318 **文献标志码:** A

CALCULATION METHOD FOR LATERAL BUCKLING CRITICAL LOAD OF LEANING-TYPE ARCH RIB SYSTEM

*LIU Ai-rong, SHEN Fu-lin, KUANG Ju-tao, ZHANG Jun-ping, YU Qi-cai

(School of Civil Engineering of Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: This paper focuses on the arch rib system of a leaning-type arch bridge which is a new type space arch bridge developed in recent years, the following investigation is carried out: Based on the principle of minimum potential, as well as the deformation energy of main ribs, stable ribs, the transverse brace between the main rib and stable rib, and the potential energy of an external force applied on the ribs system, the lateral buckling critical load of a leaning-type arch rib system is derived in this paper, by which the calculation method for the lateral buckling critical load is proposed. Compared with the results obtained from FEM results, it is verified that the method presented in this paper is accurate sufficiently. Furthermore, it is analyzed how those design parameters such as variation of incline angles, the lateral flexural rigidity and torsional rigidity of a stable rib and a transverse brace between the main rib, the stable rib influence on the lateral buckling critical load. The investigation shows that the incline angle and lateral flexural rigidity of stable rib are main factors to ensure the lateral buckling of a leaning-type arch rib system.

Key words: leaning-type arch ribs system; lateral buckling; critical load; energy; stable rib

斜靠式拱桥是近年来发展起来的一种新型空间拱桥, 该桥型拱肋系由两片垂直于桥面的承重拱肋(主拱肋)和设于承重拱肋两侧的斜拱肋(稳定拱

肋)组合而成, 主拱肋与稳定拱肋通过横撑连接成一个空间稳定体系。目前我国已建成了十余座斜靠式拱桥, 如湖南益阳康富桥、潮州韩江北桥等等, 斜

收稿日期: 2010-09-16; 修改日期: 2010-10-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(50978062); 广东省自然科学基金项目(9151065004000002); 广东省科技计划项目(2010A030200014)

作者简介: *刘爱荣(1972—), 女, 山西吕梁人, 教授, 博士, 从事桥梁结构防灾减灾研究(E-mail: liu-a-r@163.com);

申富林(1983—), 男, 湖南邵东人, 硕士, 从事桥梁结构防灾减灾研究(E-mail: 33729749@qq.com);

邝钜滔(1985—), 男, 广东广州人, 硕士生, 从事桥梁结构防灾减灾研究(E-mail: 659580735@qq.com);

张俊平(1968—), 男, 甘肃庆阳人, 教授, 博士, 从事桥梁结构防灾减灾研究(E-mail: 13808861313@139.com);

禹奇才(1955—), 男, 湖南双峰人, 教授, 从事桥梁结构防灾减灾研究(E-mail: zhydxs@ihw.com.cn).

靠式拱桥的最大跨径已突破 160m。斜靠式拱桥主拱肋刚度远远大于稳定拱肋，故桥梁大部分恒、活载均由主拱肋承担，稳定拱肋仅仅承担小部分活载，其主要作用是确保主拱肋的侧向稳定性。该桥型与常规拱桥不同之处在于：主拱肋间不设横撑，行车视野通透开阔，造型新颖美观；与同等跨径的无横撑系杆拱桥相比，虽然斜靠式拱桥的主拱肋截面较小，但侧向稳定性能指标相对较好；与有横撑系杆拱桥相比，其侧向刚度较小，侧向稳定性往往成为控制设计的主要因素^[1-3]。所以研究斜靠式拱桥拱肋系的侧向稳定性，构建其临界荷载的计算方法是很有必要的。

目前，有关斜靠式拱桥的稳定性研究已有涉及，但均是基于有限元数值模拟方法^[4-6]。不少学者致力于常规对称拱桥侧向稳定性的研究：钱莲萍等分析了拱面具有扒角的空间对称组拼拱肋在竖向均布荷载作用下的侧倾稳定性，导出了这类结构侧倾失稳临界荷载的近似解析解^[7]。金伟良等推导了两端铰接的 X 型双肋拱系、以及无横撑肋拱桥在径向荷载作用下的侧倾失稳临界荷载的表达式^[8-9]；刘钊等推导了有横撑常规系杆拱桥侧向弹性稳定承载力的解析计算公式，讨论了结构参数对稳定承载力的影响^[10]。

相对于平行拱肋以及具有扒角的对称倾斜拱肋，斜靠式拱肋系空间效应明显、受力复杂、结构不具对称性、主拱肋与稳定拱肋刚度差异较大，所以给侧倾失稳临界荷载解析解的推导带来了相当的难度。本文基于能量原理，在前人工作的基础上^[7-11]，首次推导出了斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载值的表达式，提出了侧倾失稳临界荷载的计算方法，并分析了结构设计参数，即稳定拱肋倾角、抗弯和抗扭刚度，主拱肋与稳定拱肋间横撑刚度对临界荷载的影响。

1 侧倾失稳临界荷载的推导

具体推导思路如下：假设主拱肋与稳定拱肋发生侧倾失稳时侧向位移和扭转位移呈余弦变化，以此构建主拱肋和稳定拱肋的侧向弯曲变形能、扭转变形能、横撑的径向和切向弯曲变形能及拱肋系的外力势能，求得整个体系的总能量，然后根据 Ritz 法针对位移函数系数对系统总能量求偏导，构建出 3 阶行列式从而求得临界荷载的解析解。

1.1 斜靠式拱肋系简化计算图式

假设主拱肋与稳定拱肋拱轴线均为圆弧曲线；

拱肋与横撑刚度均为恒定值；主拱肋与稳定拱肋间横撑等间距布置、横撑与拱肋刚接；拱肋在侧倾失稳过程中轴向不发生变形；拱肋侧倾失稳模态呈余弦曲线；主拱肋与稳定拱肋侧向位移保持一致。

斜靠式拱肋系的简化计算图式如图 1 示，图 2 为拱肋微元体变形图，图 1 中总体坐标系为 $OXYZ$ ，在拱肋中性轴处建立流动坐标系 $oxyz$ ，沿坐标轴 x 、 y 和 z 的平动位移分别为 ω 、 u 和 v ，绕坐标轴 x 、 y 和 z 的转动位移分别为 θ 、 β 和 γ ；主拱肋铅垂、稳定拱肋与主拱肋间的夹角为 ϕ_0 ；主拱肋与稳定拱肋的圆心角均为 α 、半径为 R ；横撑间距为 d 、横撑长度为 $b(x) = b_0 + 2R \sin \phi_0 (1 - \cos \varphi)$ ， b_0 为拱顶横撑长度。作用于拱肋系的均布荷载与重力方向保持一致。

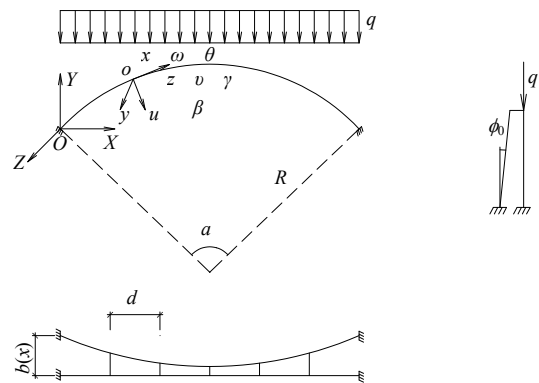


图 1 斜靠式拱肋系简化计算图式

Fig.1 Calculation sketch of leaning-type arch ribs system

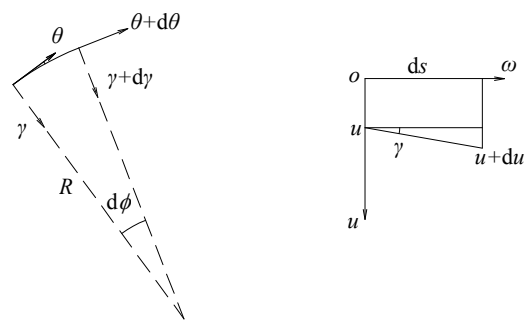


图 2 拱肋微元体

Fig.2 Differential element of arch ribs

假设主拱肋和稳定拱肋扭转角及侧倾位移函数可分别表示为：

$$\begin{cases} \theta_1 = C_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\alpha} \right) \\ \theta_2 = C_3 \left(1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\alpha} \right) \\ u = C_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\alpha} \right) \end{cases} \quad (1)$$

由于主拱肋和稳定拱肋拱脚嵌固，所以位移函数应满足以下边界条件： $\varphi=0$ 和 $\varphi=\alpha$ 时， $\theta_1=\theta_2=0$ 、 $\theta'_1=\theta'_2=0$ 、 $u=0$ 、 $u'=0$

主拱肋和稳定拱肋绕 z 轴的侧向挠曲率为^[11]：

$$K_v^I = \frac{\theta_1}{R} - \frac{d^2u}{ds^2}, K_v^{II} = \frac{\theta_2}{R} - \frac{d^2u}{ds^2} \quad (2)$$

绕 x 轴的扭转曲率为：

$$K_w^I = \frac{d\theta_1}{ds} + \frac{1}{R} \frac{du}{ds}, K_w^{II} = \frac{d\theta_2}{ds} + \frac{1}{R} \frac{du}{ds} \quad (3)$$

1.2 斜靠式拱肋系总能量

斜靠式拱肋系侧倾总能量为：

$$W = U_u^I + U_u^{II} + U_w^I + U_w^{II} + U_{cu}^I + U_{cu}^{II} + U_{bv} + U_{bh} + V \quad (4)$$

式中： U_u^I 、 U_u^{II} 、 U_w^I 、 U_w^{II} 、 U_{cu}^I 、 U_{cu}^{II} 分别为主拱肋和稳定拱肋的侧向总体弯曲变形能、扭转变形能、局部弯曲变形能； U_{bv} 、 U_{bh} 分别为横撑的径向和切向弯曲变形能； V 为拱肋系的外力势能。

(1) 主拱肋和稳定拱肋侧向总体弯曲变形能。

$$U_u^I + U_u^{II} = \frac{1}{2} E^I I_u^I \int_s (K_v^I)^2 ds + \frac{1}{2} E^{II} I_u^{II} \int_s (K_v^{II})^2 ds = \frac{1}{2} E^I I_u^I \left[\frac{3C_1^2}{R^2} + 2 \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{C_1 C_2}{R^3} + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^4 \frac{C_2^2}{R^4} \right] \frac{R\alpha}{2} + \frac{1}{2} E^{II} I_u^{II} \left[\frac{3C_3^2}{R^2} + 2 \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{C_3 C_2}{R^3} + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^4 \frac{C_2^2}{R^4} \right] \frac{R\alpha}{2} \quad (5)$$

式中， $E^I I_u^I$ 和 $E^{II} I_u^{II}$ 分别为主拱肋和稳定拱肋的侧向抗弯刚度。

(2) 主拱肋和稳定拱肋扭转变形能。

$$U_w^I + U_w^{II} = \frac{1}{2} G^I T^I \int_s (K_w^I)^2 ds + \frac{1}{2} G^{II} T^{II} \int_s (K_w^{II})^2 ds = \frac{1}{2} G^I T^I \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{C_1}{R} + \frac{C_2}{R^2} \right)^2 \frac{R\alpha}{2} + \frac{1}{2} G^{II} T^{II} \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{C_3}{R} + \frac{C_2}{R^2} \right)^2 \frac{R\alpha}{2} \quad (6)$$

式中， $G^I T^I$ 和 $G^{II} T^{II}$ 分别为主拱肋和稳定拱肋的抗扭刚度。

(3) 横撑的切向弯曲变形能。

拱肋系在发生侧倾时，横撑沿拱轴线切向发生弯曲变形，如图 3 示，则单根横撑的切向弯曲变形能为：

$$\bar{U}_{bh} = \frac{1}{2E_b I_{bh}} \int_0^{y_{01}} M_{bh1}^2 dy_0 + \frac{1}{2E_b I_{bh}} \int_0^{y_{02}} M_{bh2}^2 dy_0 \quad (7)$$

式中： $E_b I_{bh}$ 为横撑切向抗弯刚度； y_{01} 、 y_{02} 分别为横撑切向变形反弯点与主拱肋和稳定拱肋的垂直距离， y_{01} 与 y_{02} 之和为横撑长度，即 $y_{01} + y_{02} = b(x)$ 。由图 3，根据叠加原理可得近主拱肋和稳定拱肋横撑两端的切向弯矩分别为：

$$\begin{cases} M_{bh1} = \frac{4E_b I_{bh}}{b(x)} \gamma_1 + \frac{2E_b I_{bh}}{b(x)} \gamma_3 \\ M_{bh2} = \frac{2E_b I_{bh}}{b(x)} \gamma_1 + \frac{4E_b I_{bh}}{b(x)} \gamma_3 \end{cases} \quad (8)$$

式中： γ_1 和 γ_3 分别为与主拱肋和稳定拱肋交接处横撑的切向转角。由三角形相似得：

$$\begin{cases} y_{01} = \frac{2\gamma_1 + \gamma_3}{3(\gamma_1 + \gamma_3)} b(x) \\ y_{02} = \frac{\gamma_1 + 2\gamma_3}{3(\gamma_1 + \gamma_3)} b(x) \end{cases} \quad (9)$$

将式(8)、式(9)代入式(7)，可得：

$$\bar{U}_{bh} = \int_0^{y_{01}} \frac{1}{y_{01}^2} \frac{2E_b I_{bh}}{b(x)^2} (4\gamma_1^2 + 4\gamma_1\gamma_3 + \gamma_3^2) y_0^2 dy_0 + \int_0^{y_{02}} \frac{1}{y_{02}^2} \frac{2E_b I_{bh}}{b(x)^2} (\gamma_1^2 + 4\gamma_1\gamma_3 + 4\gamma_3^2) y_0^2 dy_0 \quad (10)$$

将 \bar{U}_{bh} 分摊到节间长度 d 上，每个节间都作这样的处理，并且为了简化起见，以四分之一跨处拱肋的内间距 h 代替 $b(x)$ ^[7]，则全拱肋范围内横撑的切向弯曲变形能为：

$$U_{bh} = \int_s \frac{\bar{U}_{bh}}{d} ds = \frac{2E_b I_{bh}}{9dh} \left[\int_s \frac{2\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_3} (4\gamma_1^2 + 4\gamma_1\gamma_3 + \gamma_3^2) ds + \int_s \frac{\gamma_1 + 2\gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_3} (\gamma_1^2 + 4\gamma_1\gamma_3 + 4\gamma_3^2) ds \right] \quad (11)$$

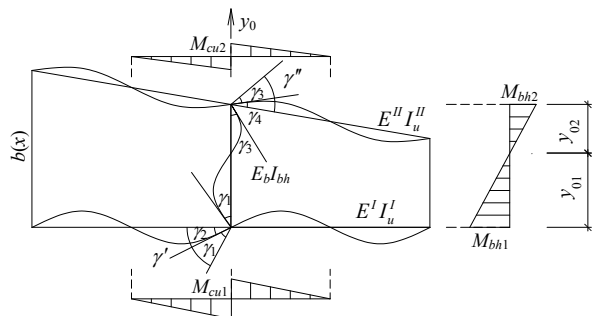


图 3 拱肋和横撑的弯曲变形

Fig.3 Bending deformation energy of ribs and transverse braces

由于 y_{01} 与 y_{02} 的值与主拱肋和稳定拱肋抗弯刚度、节间长度、横撑的抗弯刚度及长度密切相关，

当主拱肋与稳定拱肋抗弯刚度一致时, $y_{01} = y_{02}$ 。
为求解 y_{01} 与 y_{02} , 假设斜靠式拱肋系发生侧倾时,
其力学简图如图 4 示, γ_3 和 γ_1 存在以下关系:

$$\gamma_3 = a\gamma_1 \quad (12)$$

通过求解图 4, 可知:

$$a = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{2C-1}{C-2} \quad (13)$$

式中:

$$\begin{aligned} & [E^I E_b I_u^I I_{bh} d + E^{II} E_b I_{bh} I_u^{II} d \cos \phi_0 + \\ & 12E^I E^{II} I_u^I I_u^{II} b(x) \cos \phi_0] / \\ & [6E^I E^{II} I_u^I I_u^{II} b(x) \cos \phi_0 + E^I E_b I_u^I I_{bh} d] \end{aligned}$$

则可得: $y_{01} = \frac{2+a}{1+2a} y_{02}$ 。

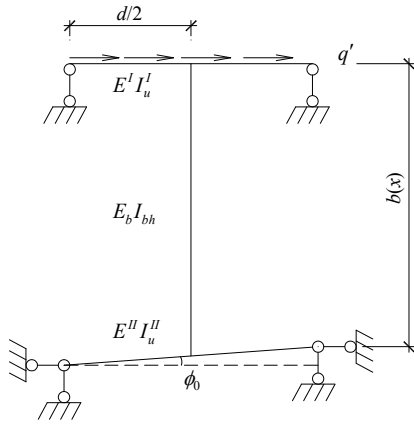


图 4 拱肋和横撑的受力简图

Fig.4 Sketch of arch ribs and transverse brace

(4) 拱肋局部弯曲变形能。

设主拱肋、稳定拱肋发生切向局部变形时, 绕 z 轴的弯矩分别为 M_{cu1} 、 M_{cu2} , 则其相应的局部弯曲变形能分别用 U_{cu}^I 、 U_{cu}^{II} 表示, 单个节间主拱肋、稳定拱肋局部弯曲变形能表示为:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{cu}^I + \bar{U}_{cu}^{II} &= \frac{1}{2E^I I_u^I} \int_d M_{cu1}^2 dx_0 + \frac{1}{2E^{II} I_u^{II}} \int_d M_{cu2}^2 dx_0 = \\ & \frac{6E^I I_u^I}{d} \gamma_2^2 + \frac{6E^{II} I_u^{II}}{d} \gamma_4^2 \quad (14) \end{aligned}$$

将 \bar{U}_{cu}^I 和 \bar{U}_{cu}^{II} 沿节间长度 d 摊开, 每个节间都作用同样的处理, 则全拱肋系的局部弯曲变形能为:

$$\begin{aligned} U_{cu}^I + U_{cu}^{II} &= \int_s \frac{\bar{U}_{cu}^I}{d} ds + \int_s \frac{\bar{U}_{cu}^{II}}{d} ds = \\ & \int_s \frac{6E^I I_u^I}{d^2} \gamma_2^2 ds + \int_s \frac{6E^{II} I_u^{II}}{d^2} \gamma_4^2 ds \quad (15) \end{aligned}$$

由图 3 得:

$$2M_{cu1} = M_{bh1}, \quad 2M_{cu2} = M_{bh2} \quad (16)$$

并令:

$$\gamma' = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \gamma'' = \gamma_3 + \gamma_4 \quad (17)$$

由于 $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{dE_b I_{bh}}{2hE^I I_u^I}$, $\frac{\gamma_4}{\gamma_3} = \frac{dE_b I_{bh}}{2hE^{II} I_u^{II}}$ 则得:

$$\begin{aligned} U_{cu}^I + U_{cu}^{II} &= \int_s \frac{6E^I I_u^I}{d^2} \gamma_2^2 ds + \int_s \frac{6E^{II} I_u^{II}}{d^2} \gamma_4^2 ds = \\ & \int_s \frac{3E_b I_{bh}}{dh} \gamma_1 \gamma_2 ds + \int_s \frac{3E_b I_{bh}}{dh} \gamma_3 \gamma_4 ds \quad (18) \end{aligned}$$

设:

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma'} = \frac{1}{1 + \frac{dE_b I_{bh}}{2hE^I I_u^I}} \\ \eta_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma'} = \frac{1}{1 + \frac{2hE^I I_u^I}{dE_b I_{bh}}} \\ \eta_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma''} = \frac{1}{1 + \frac{dE_b I_{bh}}{2hE^{II} I_u^{II}}} \\ \eta_4 = \frac{\gamma_4}{\gamma''} = \frac{1}{1 + \frac{2hE^{II} I_u^{II}}{dE_b I_{bh}}} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \eta_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma''} = \frac{1}{1 + \frac{dE_b I_{bh}}{2hE^{II} I_u^{II}}} \\ \eta_4 = \frac{\gamma_4}{\gamma''} = \frac{1}{1 + \frac{2hE^{II} I_u^{II}}{dE_b I_{bh}}} \end{cases} \quad (20)$$

所以拱肋系的局部弯曲变形能和横撑的切向弯曲变形能可表示为:

$$\begin{aligned} U_{bh} + U_{cu}^I + U_{cu}^{II} &= \\ & \frac{2E_b I_{bh}}{9dh} \int_s \frac{2\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_3} (4\gamma_1^2 + 4\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_3^2) + \\ & \frac{3E_b I_{bh}}{dh} \int_s \gamma_1 \gamma_2 ds + \\ & \frac{2E_b I_{bh}}{9dh} \int_s \frac{\gamma_1 + 2\gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_3} (\gamma_1^2 + 4\gamma_1 \gamma_3 + 4\gamma_3^2) ds + \\ & \frac{3E_b I_{bh}}{dh} \int_s \gamma_3 \gamma_4 ds = \\ & \frac{3E_b I_{bh}}{dh} \eta_1 (A\eta_1 + \eta_2) \cdot \frac{C_2^2}{R^2} \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{\alpha R}{2} + \\ & \frac{3E_b I_{bh}}{dh} \eta_3 (B\eta_3 + \eta_4) \cdot \frac{C_2^2}{R^2} \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{\alpha R}{2} \quad (21) \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{27} \cdot \frac{(a+2)}{(a+1)} (4+4a+a^2); \\ B &= \frac{2}{27} \cdot \frac{(1/a+2)}{(1/a+1)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{a} + 4 \right). \end{aligned}$$

(5) 横撑径向弯曲变形能。

拱肋系发生侧倾变形时, 横撑亦会发生径向弯曲变形, 如图 5 示, 则单根横撑的径向弯曲变形能可表示为:

$$\bar{U}_{bv} = \frac{1}{2E_b I_{bv}} \int_0^{b(x)/2} \left(\frac{M_{bv1}}{y'_{01}} y'_0 \right)^2 dy'_0 + \frac{1}{2E_b I_{bv}} \int_0^{b(x)/2} \left(\frac{M_{bv2}}{y'_{02}} y'_0 \right)^2 dy'_0 \quad (22)$$

式中, $E_b I_{bv}$ 为横撑径向抗弯刚度; 横撑两端近主拱肋和稳定拱肋的径向弯矩分别为:

$$\begin{cases} M_{bv1} = \frac{6E_b I_{bv}}{b(x)} (\theta_c + \theta_1) \\ M_{bv2} = \frac{6E_b I_{bv}}{b(x)} (\theta_c + \theta_2) \end{cases} \quad (23)$$

其中: $\theta_c = \frac{v'}{b(x)} = \frac{\sin \phi_0}{b(x)} u = \frac{\sin \phi_0}{h} u$ 。

则由式(22)~式(23), 可得:

$$U_{bv} = \int_s \frac{\bar{U}_{bv}}{d} ds = \frac{3E_b I_{bv}}{dh} \left(\frac{\sin \phi_0}{h} C_2 + C_1 \right)^2 \frac{3R\alpha}{2} + \frac{3E_b I_{bv}}{dh} \left(\frac{\sin \phi_0}{h} C_2 + C_3 \right)^2 \frac{3R\alpha}{2} \quad (24)$$

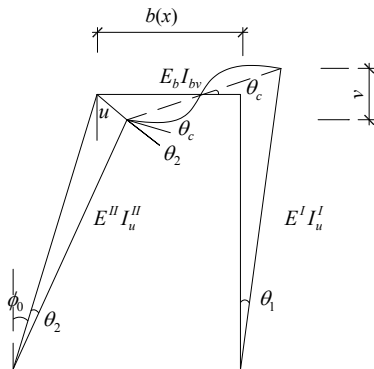


图 5 横撑径向弯曲变形

Fig.5 Radial bending deformation of transverse brace

(6) 外力势能。

$$V = -\frac{q}{2} \int_L R \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 d\varphi = -\frac{q}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \cdot C_2^2 \quad (25)$$

1.3 临界荷载的解析解

根据式(4)、式(5)、式(6)、式(21)、式(24)和式(25), 可求得斜靠式拱肋系的总能量, 由 Ritz 法可得:

$$\frac{\partial W}{\partial C_i} = 0 \quad (26)$$

将总能量分别对 C_1 、 C_2 、 C_3 求偏导, 得出如下特征方程:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = q_{cr} \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & r_2 & \\ & & r_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

式中 q_{cr} 为拱肋系侧倾临界荷载, 令式(27)的系数行列式的值为零, 可求得:

$$q_{cr} = \frac{E^I I_u^I}{R^3} D \quad (28)$$

其中:

$$D = \frac{(S_1 S_3 S_5 - S_1 S_4^2 - S_2^2 S_5)}{S_1 S_5 \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2} R^4,$$

$$S_1 = \frac{3\lambda_1}{R^2} + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{R^2} + 6\nu_1,$$

$$S_2 = \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{\lambda_1}{R^3} + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{R^2} + 6\nu_1 \frac{\sin \phi_0}{h},$$

$$S_3 = \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^4 \frac{\lambda_1}{R^4} + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^4 \frac{\lambda_2}{R^4} + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{R^4} + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{\lambda_3}{R^4} + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{2\nu_2}{R^2} + \frac{12 \sin^2 \phi_0}{h^2} \nu_1,$$

$$S_4 = \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{\lambda_2}{R^3} + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{\lambda_3}{R^3} + \frac{6 \sin \phi_0}{h} \nu_1,$$

$$S_5 = \frac{3\lambda_2}{R^2} + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{\lambda_3}{R^2} + 6\nu_1,$$

$$\lambda_1 = \frac{E^I I_u^I}{G^I T^I}, \quad \lambda_2 = \frac{E^{II} I_u^{II}}{G^I T^I}, \quad \lambda_3 = \frac{G^{II} T^{II}}{G^I T^I},$$

$$\nu_1 = \frac{3E_b I_{bv}}{dh G^I T^I},$$

$$\nu_2 = \frac{3E_b I_{bh}}{dh G^I T^I} [\eta_1 (A\eta_1 + \eta_2) + \eta_3 (B\eta_3 + \eta_4)].$$

2 算例分析

2.1 理论解析解与有限元数值解比较

为验证本文所提出的斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载计算方法的正确性, 以某跨径为 100m 的斜靠式拱桥拱肋系为例, 采用 Midas/Civil 软件建立空间梁单元有限元计算模型, 如图 6 所示, 计算了拱肋系的侧倾失稳临界荷载。表 1 和表 2 分别给出了斜靠式拱肋系的设计参数以及本文所推导的斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载的理论解析解与有限元数值模拟计算结果的比较, 可以看出二者结果比较吻合, 最大误差为 7.17%, 说明了本文所提出的计算方法精度足够。

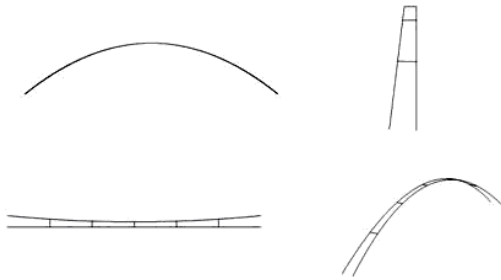


图6 有限元计算模型

Fig.6 The finite element model

表1 某斜靠式拱桥拱肋系的设计参数

Table 1 The design parameters of arch ribs system of a leaning type arch bridge

拱肋跨径/m	拱肋矢跨比	主拱肋惯性矩		稳定拱肋惯性矩		横撑惯性矩	
		侧向抗弯/m ⁴	抗扭/m ⁴	侧向抗弯/m ⁴	抗扭/m ⁴	径向抗弯/m ⁴	切向抗弯/m ⁴
100	1/5	0.5625	0.1215	0.3221	0.06441	0.002012	0.007057

表2 稳定拱肋不同倾角下斜靠式拱肋系临界荷载理论解与有限元计算值的比较

Table 2 Comparison of the theoretical and FEM results under different inclined angle of stable rib

	5°	7°	9°	11°	13°	15°	17°
理论解/(×10 ⁶ N/m)	1.360	1.415	1.430	1.451	1.476	1.545	1.592
有限元计算值/(×10 ⁶ N/m)	1.276	1.350	1.423	1.497	1.570	1.642	1.715
误差/(%)	6.62	4.82	0.46	3.06	6.00	5.91	7.17

2.2 侧倾失稳临界荷载影响因素参数化分析

通过变化稳定拱肋倾角、侧向和抗扭刚度，调整横撑的切向和径向抗弯刚度，研究稳定拱肋和横撑等设计参数对斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载的影响。

(1) 稳定拱肋倾角变化的影响。

由表2可知，随着稳定拱肋倾角的增大，临界荷载值呈增大趋势，从5°~17°，临界荷载增加约17.1%，说明稳定拱肋倾角的增大对拱肋系侧倾稳定性的提高是有利的。

(2) 稳定拱肋刚度的影响。

图7为当稳定拱肋侧向抗弯刚度和抗扭刚度分别为设计抗弯刚度的0.2倍、0.5倍、1倍、2倍、3倍、4倍和5倍时，拱肋系的侧倾失稳临界荷载值。图7中 q_{crd} 为设计临界荷载值、 K/K_d 为稳定拱肋的刚度与设计刚度之比。由图7可知，当稳定拱肋侧向抗弯刚度由0.2倍增至5倍时，临界荷载增大了1.33倍，而当抗扭刚度由0.2倍增至5倍时，临界荷载才增大了1.03倍，所以稳定拱肋侧向抗弯刚度的增加，能有效提高斜靠式拱肋系的临界荷载值，相反稳定拱肋抗扭刚度对临界荷载影响甚微。

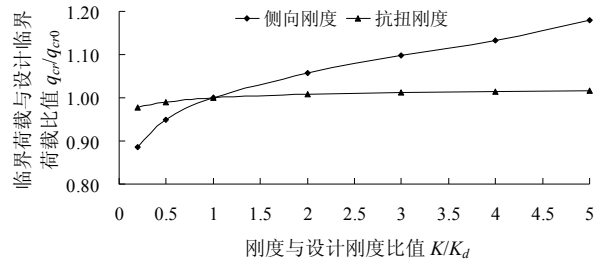


图7 稳定拱肋不同刚度下的临界荷载

Fig.7 The critical loads under different lateral flexural rigidity of stable ribs

(3) 横撑刚度的影响。

图8为当横撑的切向、径向抗弯刚度分别为设计刚度的0.2倍、0.5倍、1倍、2倍、3倍、4倍和5倍时，拱肋系的侧倾失稳临界荷载值。由图8可知，当切向抗弯刚度由0.2倍增至5倍时，临界荷载增大了1.29倍，当径向抗弯刚度由0.2倍增加至5倍时，临界荷载增大了1.51倍。随着横撑切向和径向抗弯刚度的增加，拱肋系临界荷载值增加较大，表明横撑切向和径向刚度亦是控制斜靠式拱肋系侧倾稳定性的主要因素，在实际工程设计中不容忽视。

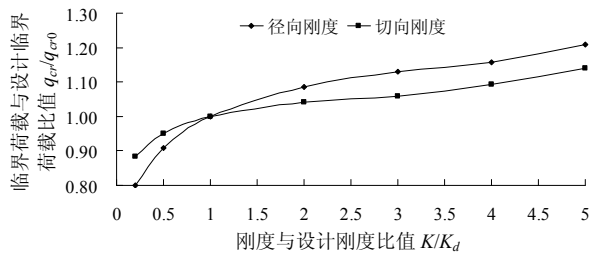


图8 横撑不同抗弯刚度下的临界荷载

Fig.8 The critical loads under different lateral flexural rigidity of transverse brace

3 结论

(1) 本文基于能量法首次推导了斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载解析解，提出了斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载的计算方法。通过与有限元数值计算结果比较，证明了本文所提出的计算方法是正确的，这为解决斜靠式拱桥侧倾稳定问题开辟了一条新途径。

(2) 随着稳定拱肋倾角的增大，斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载呈递增趋势，从5°~17°，临界荷载增加约17.1%，说明增加稳定拱肋倾角，可有效提高斜靠式拱肋系的侧倾稳定性，但同时也会大幅增加桥面宽度，增大地基处理的工程量。

(3) 稳定拱肋侧向抗弯刚度对斜靠式拱肋系的侧倾稳定性有较大贡献，当稳定拱肋侧倾抗弯刚度

由 0.2 倍增至 5 倍时, 临界荷载增大了 1.33 倍, 相反, 稳定拱肋抗扭刚度对斜靠式拱肋系的侧倾稳定性基本无影响, 当稳定拱肋抗扭刚度由 0.2 倍增至 5 倍时, 临界荷载才增大了 1.03 倍。所以为提高斜靠式拱肋系的侧倾稳定性, 可适当增加稳定拱肋的侧向抗弯刚度。

(4) 主拱肋与稳定拱肋间的横撑的径向和切向抗弯刚度在一定范围内对拱肋系的侧倾稳定性有较大影响, 当横撑切向抗弯刚度由 0.2 倍增至 5 倍时, 临界荷载增大了 1.29 倍, 当径向抗弯刚度由 0.2 倍增至 5 倍时, 临界荷载增大了 1.51 倍, 所以在设计中不容忽视。

参考文献:

- [1] 刘爱荣, 禹奇才, 宋瑞, 张俊平. 地震作用下斜靠式拱桥的动力稳定性[J]. 深圳大学学报, 2010, 27(3): 286—290.
Liu Airong, Yu Qicai, Song Rui, Zhang Junping. Dynamic stability of leaning-type arch bridge under earthquake [J]. Journal of Shenzhen Science and Engineering, 2010, 27(3): 286—290. (in Chinese)
- [2] 刘爱荣, 禹奇才, 张俊平, 王定文. 斜拱肋倾角变化对斜靠式拱桥地震响应的影响[J]. 暨南大学学报, 2010, 31(3): 268—272.
Liu Airong, Yu Qicai, Zhang Junping, Wang Dingwen. Influence of variation of incline angle of inclined arch rib on the seismic response of leaning-type arch bridge [J]. Journal of Jinan University, 2010, 31(3): 268—272. (in Chinese)
- [3] Shen Fulin, Liu Airong, Song Rui, Yu Qicai. Study of seismic performance of leaning-type arch bridge [C]. International Conference on Mechanic Automation and Control Engineering, 2010: 4809—4812.
- [4] 陈淮, 孙应桃. 斜靠式拱桥拱肋倾角变化对稳定性能的影响[J]. 铁道科学与工程学报, 2009, 6(1): 21—24.
Chen Huai, Sun Yingtao. Variational sloping angle of arch rib influenced on the stability of double X-shaped arch bridge [J]. China Journal of Railway Science and Engineering, 2009, 6(1): 21—24. (in Chinese)
- [5] 陈淮, 胡锋, 申哲会, 杨磊. 斜靠式拱桥稳定性分析[J]. 福州大学学报, 2005, 33: 182—186.
Chen Huai, Hu Feng, Shen Zhehui, Yang Lei. Stability analysis of leaning-type arch bridge [J]. Journal of Fuzhou University, 2005, 33: 182—186. (in Chinese)
- [6] 谷定宇, 陈淮, 王艳, 胡锋. 潮州韩江北桥斜靠拱桥稳定性分析[J]. 公路交通科技, 2006, 23(3): 100—103.
Gu Dingyu, Chen Huai, Wang Yan, Hu Feng. Stability analysis of the Chaozhou Hanjiang River Northern leaning-type arch bridge [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2006, 23(3): 100—103. (in Chinese)
- [7] 钱莲萍, 项海帆. 空间拱桥结构侧倾稳定性的实用计算[J]. 同济大学学报, 1989, 17(2): 161—172.
Qian Lianping, Xiang Haifan. A practical method for lateral buckling analysis of arch bridges [J]. Journal of Tongji University, 1989, 17(2): 161—172. (in Chinese)
- [8] 金伟良, 顾淑兴, 赵国藩. 无横撑拱桥横向稳定性的研究[J]. 中国公路学报, 1989, 2(3): 42—48.
Jin Weiliang, Gu Shuxing, Zhao Guofan. The lateral stability of tied arch bridge without bracing beams [J]. China Journal of Highway and Transport, 1989, 2(3): 42—48. (in Chinese)
- [9] 金伟良, 赵国藩. X型双肋拱系的侧倾屈曲[J]. 土木工程学报, 1989, 22(2): 44—45.
Jin Weiliang, Zhao Guofan. Lateral buckling of X-type twin ribbed arch braced with transverse beams [J]. China Civil Engineering Journal, 1989, 22(2): 44—54. (in Chinese)
- [10] 刘钊, 吕志涛. 有横撑系杆拱桥的侧向稳定承载力[J]. 工程力学, 2004, 21(3): 21—24, 54.
Liu Zhao, Lu Zhitao. Lateral buckling load of tied-arch bridges with transverse braces [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(3): 21—24, 54. (in Chinese)
- [11] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1996.
Li Guohao. Stability and vibrations of bridge structures [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1996. (in Chinese)