第4卷 第3期 力 学 学 报 Vol. 4, No. 3
1960 年 7 月 ACTA MECHANICA SINICA July, 1960

蠕变理論的平面接触問題*

H. X. 阿 魯 秋 年
(亚美尼亚苏維埃社会主义共和国叶里温)

本文推导了蠕变理論的平面接触問題的解，其中考虑了时效和材料瞬时变形时模量的改变。

在綫性的提法中，这个問題 H. E. 普罗考波維奇[1]曾进行过研究。

在解决非綫性蠕变条件下的接触問題时，必須从某些有相当物理根据的应力应变关系的假設出发。从这个观点上来看，用任何一种时效类型1)的蠕变理論都是不适宜的，因为它在解这些問題时会导致不正确的結果。这里我們用塑性滞后理論作为原始的物理假設。这一假設是由 Ю. Н. 拉包特諾夫[2]对于陈化材料給出的，并由作者[3]加以发展。

近年来，曾进行过一系列实验[4,5,6]专門驗証塑性滞后理論的基本方程。驗証結果說明了对于象鋁合金，銅，低碳鋼之类的材料理論和实驗符合得相当不錯。

在§1中推导了物体在平面应变状态下材料蠕变的塑性滞后理論，写出了有关应力应变分量的基本方程。

在§2中应用这些方程，假設应力应变成幂次規律的条件下首先地解出了半平面的平面問題，这个半平面处在非綫性蠕变条件下，并受到沿垂直方向加在自由表面上的集中力的作用，解直接用位移表示。

在§3中进一步使用这些解，証明了非綫性蠕变理論的平面接触問題的解可以化为二个联立的积分方程解。

对于在对称或在反对称承载情况下的受压物体，在同一节的2—4°中也进行了研究，并导出了这些方程的解。

§1 非綫性蠕变的应力应变关系

在一般空間应力状态，考虑材料蠕变的塑性滞后理論中，表示应变强度 $\varepsilon_i(t)$ 和应力强度 $\sigma_i(t)$ 关系的方程为:

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\varepsilon_i(t) = \sigma_i(t) - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i(\tau) \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau. \tag{1.1}$$

这里，$c(t,\tau)$ 是材料蠕变的度量指标，$\varphi^*[\varepsilon_i(t)]$ 是某一应力应变非綫性关系的函数。二者都可从簡单的蠕变試驗数据中确定。τ_1 是材料的年数，t 为时間。

同时，采用

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_i(t) &= \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{[\varepsilon_\theta(t)-\varepsilon_z(t)]^2+[\varepsilon_z(t)-\varepsilon_r(t)]^2+[\varepsilon_r(t)-\varepsilon_\theta(t)]^2+6\gamma_{r\theta}^2(t)}, \\ \sigma_i(t) &= \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{[\sigma_\theta(t)-\sigma_z(t)]^2+[\sigma_z(t)-\sigma_r(t)]^2+[\sigma_r(t)-\sigma_\theta(t)]^2+6\tau_{r\theta}^2(t)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

* 本文根据 H. X. 阿魯秋年 1959 年 7 月在力学研究所的报告翻譯，后又按 59 年苏联"应用数学与力学"第五期所发表的同一文章作了核对，发表的和原講稿略有出入。

1) 这里要指出在各种以蠕变問題为主題的文章中，所叙述的时效理論和材料的陈化现象并无联系。

利用通常的表示在圓柱坐标系(r, θ, z)中的应力和应变分量，和在主軸系中相应的分量关系的轉換公式，及假設在任何瞬时 t 应力偏量和应变偏量的主方向相同，于是对于平面应变状态的情形由(1.1)我們得到[1)]

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r(t)\varphi[\varepsilon_i(t)] &= [\sigma_r(t) - \sigma(t)] - \int_{\tau_1}^{t} [\sigma_r(\tau) - \sigma(\tau)]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}d\tau, \\
\varepsilon_\theta(t)\varphi[\varepsilon_i(t)] &= [\sigma_\theta(t) - \sigma(t)] - \int_{\tau_1}^{t} [\sigma_\theta(\tau) - \sigma(\tau)]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}d\tau, \\
\varepsilon_z(t) &= 0, \\
\gamma_{r\theta}(t)\varphi[\varepsilon_i(t)] &= \tau_{r\theta}(t) - \int_{\tau_1}^{t} \tau_{r\theta}(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}d\tau;
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

其中

$$\sigma(t) = \sigma_z(t) = \frac{1}{2}[\sigma_r(t) + \sigma_\theta(t)]. \tag{1.4}$$

方程(1.3)所描述的变形过程是既考虑了时效，又考虑了材料的滞后．这在积极的变形的情况下是正确的，并且 $\varepsilon_i(t)$ 增长的条件可認为就是这种积极性(активность)的准則．

这些方程是在材料不可压縮的一般假設下导出的：

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_r(t) + \varepsilon_\theta(t) = 0. \tag{1.5}$$

金属的蠕变試驗曲綫可很好地用冪次規律的形式来描述：

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\varepsilon_i(t) = K_0\varepsilon_i^\mu(t). \tag{1.6}$$

这里，K_0 和 μ 是物理常数，由簡单蠕变試驗可决定．

所有关于在常載荷下金属和其他建筑材料蠕变研究所得到的試驗数据指出[7]，随載荷的增加，整个变形通常增加得比按綫性規律来得快，解析上这个条件可用下列不等式表示：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \sigma^2} > 0 \quad 当\ t = t_1 = 常数时, \tag{1.7}$$

所以对于这里采用的蠕变規律(1.1)和(1.6)当

$$K_0 > 0, \quad \mu > 1 \tag{1.8}$$

时，这个条件将被遵守．

§2 在非綫性蠕变条件下，具有集中力作用在自由表面上的半平面的平衡問題

我們来研究一下一个半平面的自由表面上作用着一个随着时間变化的集中力 $p(t)$，并考虑到材料蠕变的应力应变关系呈冪次規律(1.3)及(1.6)的半平面平衡的准静态問題．

在具有应力呈冪次硬化的塑性力学中，这个問題已經被 B. B. 索柯洛夫斯基[8]解决了．他找到了当垂直力和水平力同时作用在一半平面的自由表面上时应力和应变的分布．

但是按工作[8]中以給定的应变分量来决定半平面的位移問題可化为变系数微分方程的求解問題．这方程在閉合的形式下是不可积的．

1) 为了簡略符号，变量 r, θ 和 z 被略去了．

所以在本节中，由非綫性蠕变理論的基本方程(1.3)及(1.6)出发，給出这一問題直接用位移表示的解。这样的形式在以后研究蠕变理論的平面接触問題中还要用。

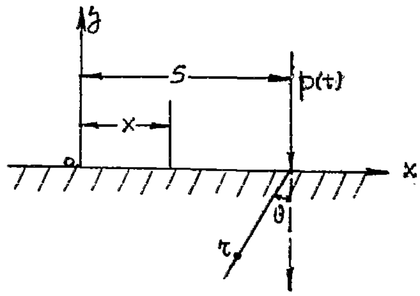

图 1

把圓柱坐标系(r, θ, z)的原点放在集中力$P(t)$在半平面上的作用点，坐标軸r，θ和z如图1所示。

由表示非綫性蠕变条件下的应力分量和应变分量关系的方程(1.3)解$[\sigma_r(t)-\sigma(t)]$，$[\sigma_\theta(t)-\sigma(t)]$和$\tau_{r\theta}(t)$，并注意(1.4)，(1.5)和(1.6)的关系，可得

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r(t) &= \sigma_\theta(t) + 2K_0\left\{\varepsilon_r(t)\varepsilon_i^{\mu-1}(t) + \int_{\tau_1}^{t}\varepsilon_r(\tau)\varepsilon_i^{\mu-1}(\tau)R(t, \tau)d\tau\right\},\\
\tau_{r\theta}(t) &= K_0\left\{\gamma_{r\theta}(t)\varepsilon_i^{\mu-1}(t) + \int_{\tau_1}^{t}\gamma_{r\theta}(\tau)\varepsilon_i^{\mu-1}(\tau)R(t, \tau)d\tau\right\},\\
\sigma_z(t) &= \frac{1}{2}[\sigma_r(t)+\sigma_\theta(t)].
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

这里，$R(t, \tau)$是蠕变核$K(t, \tau)=\dfrac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}$的預解式，也即松弛核。

圓柱坐标系(r, θ, z)的平衡方程应用在本問題上有下列的形式：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}[r\sigma_r(t)] + \frac{\partial\tau_{r\theta}(t)}{\partial\theta} - \sigma_\theta(t) = 0,\\
\frac{\partial\sigma_\theta(t)}{\partial\theta} + r\frac{\partial\tau_{r\theta}(t)}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}(t) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

应变分量和位移分量的关系是：

$$\varepsilon_r(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta(t) = \frac{1}{r}\frac{\partial v(t)}{\partial\theta} + \frac{u(t)}{r},$$

$$\varepsilon_z(t) = \frac{\partial w(t)}{\partial z} = 0,$$

$$2\gamma_{r\theta}(t) = \frac{\partial v(t)}{\partial r} - \frac{v(t)}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(t)}{\partial\theta}. \tag{2.3}$$

这里$u(t)$，$v(t)$和$w(t)$是时間t时沿坐标方向(r, θ, z)的位移分量。应变协調微分方程是：

$$\frac{\partial^2\varepsilon_r(t)}{\partial\theta^2} + r^2\frac{\partial^2\varepsilon_\theta(t)}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial\varepsilon_\theta(t)}{\partial r} - r\frac{\partial\varepsilon_r(t)}{\partial r} - 2r\frac{\partial^2\gamma_{r\theta}(t)}{\partial r\partial\theta} - 2\frac{\partial\gamma_{r\theta}(t)}{\partial\theta} = 0. \tag{2.4}$$

边界条件是

$$\sigma_\theta(t) = \tau_{r\theta}(t) = 0 \qquad \text{当 } \theta = \pm\frac{1}{2}\pi \text{ 时}, \tag{2.5}$$

即在半平面的自由表面上沒有外力。

我們将要寻求用位移表示的問題的精确解如下列的形式：

www.cnki.net

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= \kappa[f_1(r)\chi'(\theta, t) + f_0'(\theta, t)], \\ v(t) &= \kappa[f_2(r)\chi(\theta, t) - f_0(\theta, t)], \\ w &= 0, \quad \kappa = \pm 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

这里 $f_1(r)$, $f_2(r)$, $\kappa(\theta, t)$ 和 $f_0(\theta, t)$ 是一些单值連續函数，在所有半平面 $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ 及 $r > 0$，并在任一瞬时 $t \geqslant \tau_1$ 都是有定义的。

从(2.3)的头二个关系，我們得

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r(t) &= \kappa f_1'(r)\chi'(\theta, t), \\ \varepsilon_\theta(t) &= \kappa\frac{1}{r}[f_2(r) + f_1(r)]\chi'(\theta, t). \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

利用蠕变关系式(2.7)和材料不可压縮条件(1.5)得到：

$$f_2(r) = -[f_1'(r)r + f_1(r)]. \tag{2.8}$$

假設剪应力 $\tau_{r\theta}(t)$ 在所有半平面內及任何时間 t 都等于零。于是由(2.1)和(2.3)，我們将有

$$\frac{\partial v(t)}{\partial r} - \frac{v(t)}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(t)}{\partial \theta} = 0. \tag{2.9}$$

把(2.6)的位移分量表达式和它們的导数代入(2.9)，利用等式(2.8)，我們得到下列微分方程来决定函数 $f_0(\theta, t)$，$\chi(\theta, t)$ 和 $f_1(r)$。

$$\left.\begin{aligned} f_0''(\theta, t) + f_0(\theta, t) &= 0, \\ \chi''(\theta, t) + \lambda^2\chi(\theta, t) &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

$$r^2 f_1''(r) + r f_1'(r) - [1 - \lambda^2] f_1(r) = 0. \tag{2.11}$$

这里 λ 是以后决定的一个参数。

方程(2.11)的一般积分是

$$f_1(r) = D_1 r^{\sqrt{1-\lambda^2}} + D_2 r^{-\sqrt{1-\lambda^2}} \qquad 当 -\infty < \lambda^2 < 1, \tag{2.12}$$

这里 D_1 和 D_2 是积分常数。

很明显，当 $r \to \infty$ 时，位移 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在任何 $t \geqslant \tau_1$ 时都应当是有限的，借助于(2.6)，(2.8)和(2.12)諸关系式，我們得到 $D_1 = 0$。

于是 $f_1(r)$ 的表达式(2.12)可取下列形式：

$$f_1(r) = r^{-\sqrt{1-\lambda^2}} \qquad (-\infty < \lambda^2 < 1). \tag{2.13}$$

这里为以后計算方便起見，采取 $D_2 = 1$。

利用(2.3)，(2.6)，(2.7)，(2.8)，(2.9)及(2.13)，可得

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) = -\varepsilon_\theta(t) &= -\kappa\sqrt{1-\lambda^2}\, r^{-(1+\sqrt{1-\lambda^2})}\chi'(\theta, t), \\ \gamma_{r\theta}(t) = \varepsilon_z(t) &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

由于(1.2)和(2.14)的关系，剪应变強度 $\varepsilon_i(t)$ 为

$$\varepsilon_i(t) = |\varepsilon_r(t)| = \sqrt{1-\lambda^2}\, r^{-(1+\sqrt{1-\lambda^2})}\chi'(\theta, t). \tag{2.15}$$

把应变分量 $\varepsilon_r(t)$，$\varepsilon_\theta(t)$，$\gamma_{r\theta}(t)$ 和 $\varepsilon_i(t)$ 的表达式(2.14)，(2.15)，代入(2.1)，得

$$\sigma_r(t) = \sigma_\theta(t) - 2\kappa K_0[\sqrt{1-\lambda^2}\, r^{-(1+\sqrt{1-\lambda^2})}]^\mu H_1(\theta, t),$$

$$\sigma_z(t) = \frac{1}{2}[\sigma_r(t) + \sigma_\theta(t)], \quad \tau_{r\theta}(t) = 0. \tag{2.16}$$

这里,使

$$H_1(\theta, t) = \xi(\theta, t) + \int_{\tau_1}^{t} \xi(\theta, \tau) R(t, \tau) d\tau,$$

$$\xi(\theta, t) = [\chi'(\theta, t)]^\mu. \tag{2.17}$$

并且 $\chi(\theta, t)$ 是方程(2.10)的解.

由等式(2.10)得到的应变及应力分量的表达式(2.14),(2.15),(2.16)完全满足塑性滞后理論的方程(1.3)或(2.1),也滿足应变协調方程(2.4).

把(2.16)的应力分量的表达式代入平衡方程(2.2),这些方程将被满足,如果使

$$\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1}{\mu} - 1, \quad \sigma_0 = \text{const}. \tag{2.18}$$

但在自由表面上应力不存在,即

$$\sigma_\theta(t) = \tau_{r\theta}(t) = 0 \quad 当\ \theta = \pm\frac{1}{2}\pi, \quad t \geqslant \tau_1 时.$$

这些条件只当到处 $\sigma_\theta(t) = 0$ 的时候,才和(2.18)一致.

于是表达式(2.16)和(2.18)采取如下形式:

$$\sigma_r(t) = -\frac{2\kappa K_0(m-1)^\mu}{r} H_1(\theta, t), \quad \sigma_\theta(t) = \tau_{r\theta}(t) = 0,$$

$$\sigma_z(t) = -\frac{\kappa K_0(m-1)^\mu}{r} H_1(\theta, t) \qquad \lambda^2 = \frac{2\mu-1}{\mu^2}, \ m = \frac{1}{\mu}. \tag{2.19}$$

这里,函数 $H_1(\theta, t)$ 由公式(2.17)决定.

我們使作用在半平面(限于圓柱面 $r =$ 常数)任何截面上力的主向量的分量和給定的垂直力 $P(t)$ 相等,于是得到一个应力 $\sigma_r(t)$ 应該滿足的等式

$$P(t) = -\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \sigma_r(t) r \cos\theta d\theta. \tag{2.20}$$

从关系式(2.19)可看到,当 $0 < \mu \leqslant 1$ 时,参数 λ^2 在 $-\infty < \lambda^2 \leqslant 1$ 范围内变化,同时根据(2.1),$\mu = \lambda^2 = 1$ 相当于在綫性蠕变条件下的半平面的平衡情况.

现在我們轉到求半平面中的位移 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的問题. (2.10)中第一个微分方程的解是

$$f_0(\theta, t) = D_5(t)\cos\theta + D_6(t)\sin\theta. \tag{2.21}$$

(2.10)中第二个微分方程的解将按 μ 值不同而有不同的形式. 当 $\mu = \frac{1}{2}$, $\chi(\theta, t)$ 是 θ 的綫性函数,

$$\chi(\theta, t) = D_3(t) + D_4(t)\theta; \tag{2.22}$$

而当 $\mu \neq \frac{1}{2}$ 时,$\chi(\theta, t)$ 由三角函数或双曲綫函数表示:

www.cnki.net

$$\left.\begin{aligned}\chi(\theta,t)&=D_3(t)\cos\lambda\theta+D_4(t)\sin\lambda\theta\quad\left(\mu>\frac{1}{2}\right),\\ \chi(\theta,t)&=D_3(t)\operatorname{ch}\lambda\theta+D_4(t)\operatorname{sh}\lambda\theta\quad\left(\mu<\frac{1}{2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{2.23}$$

这里 $D_3(t)$, $D_4(t)$, $D_5(t)$ 和 $D_6(t)$ 是任意的仅依賴于 t 的积分函数。

假定所考慮的半平面在水平方向不移动也不旋轉，則在 $\theta=0$ 和 $t\geqslant\tau_1$ 时，

$$v(t)=0.\tag{2.24}$$

于是，根据(2.6)，(2.21)，(2.22)，(2.23)，将有

$$D_3(t)=D_5(t)=0.\tag{2.25}$$

函数 $f_0(\theta,t)$ 及 $\chi(\theta,t)$ 的表达式(2.21)，(2.22)，(2.23)取下列形式：

$$\left.\begin{aligned}f_0(\theta,t)&=D_6(t)\sin\theta,\\ \chi(\theta,t)&=D_4(t)\theta\quad\left(\mu=\frac{1}{2}\right),\\ \chi(\theta,t)&=D_4(t)\sin l\theta\quad\left(\mu>\frac{1}{2}\right),\\ \chi(\theta,t)&=D_4(t)\operatorname{sh}\beta\theta\quad\left(\mu<\frac{1}{2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{2.26}$$

其中与 μ 有关的 l 和 β 为

$$l^2=\frac{2\mu-1}{\mu^2},\quad \beta^2=\frac{1-2\mu}{\mu^2}.\tag{2.27}$$

现在利用等式(2.17)，(2.19)，(2.20)及(2.26)来决定 $D_4(t)$，得到下面伏尔泰抗积分方程的形式：

$$D_4^*(t)=\frac{P(t)}{K_0(m-1)^{\mu}J(\mu)}-\int_{\tau_1}^{t}D_4^*(\tau)R(t,\tau)d\tau,\tag{2.28}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&D_4^*(t)=D_4^{\mu}(t),\quad m=\frac{1}{\mu},\quad \kappa=+1,\\ &J(\mu)=4l\mu\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos l\theta)^{\mu}\cos\theta d\theta\quad\left(\mu>\frac{1}{2}\right),\\ &J(\mu)=4\beta\mu\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\operatorname{ch}\beta\theta)^{\mu}\cos\theta d\theta\quad\left(\mu<\frac{1}{2}\right),\\ &J(\mu)=4\quad\left(\mu=\frac{1}{2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{2.29}$$

K_0 和 μ 是表征非綫性的冪次規律的物理常数。

方程(2.28)的解为

$$D_4(t)=\frac{1}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)}\left(P(t)-\int_{\tau_1}^{t}P(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right)^m.\tag{2.30}$$

因为 $R(t,\tau)$ 是蠕变核 $K(t,\tau)=\partial C(t,\tau)/\partial\tau$ 的预解式。

由表达式(2.26)，(2.13)，(2.8)把函数 $\chi(\theta,t)$, $f_0(\theta,t)$, $f_1(r)$ 和 $f_2(r)$ 以及它們的导数代入关系式(2.6)，并利用函数 $D_4(t)$ 的表达式(2.30)，得到

$$
\left.\begin{aligned}
u(t) &= \frac{[(1-L)P(t)]^m}{K_0^m\cdot(m-1)J^m(\mu)}\, r^{1-m}\eta'(\theta,\mu) + D_6(t)\cos\theta, \\
v(t) &= \frac{(m-2)[(1-L)P(t)]^m}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)}\, r^{1-m}\eta(\theta,\mu) - D_6(t)\sin\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{2.31}
$$

其中L表示伏尔泰拉型的积分算子.

$$
Ly(t) = \int_{\tau_1}^{t} y(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau, \tag{2.32}
$$

$$
\eta(\theta,\mu) = 0 \quad \left(\mu = \frac{1}{2}\right), \qquad \eta(\theta,\mu) = \sin l\theta \quad \left(\mu > \frac{1}{2}\right), \tag{2.33}
$$

$$
\eta(\theta,\mu) = \operatorname{sh}\beta\theta \quad \left(\mu < \frac{1}{2}\right).
$$

半平面边界点的位移,亦即在$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$处点的位移,根据(2.31)和(2.33)将有下面形式:

$$
\begin{aligned}
[u(t)]_{\theta=-\frac{1}{2}\pi} &= [u(t)]_{\theta=\frac{1}{2}\pi} = B[(1-L)P(t)]^m r^{1-m}, \\
[v(t)]_{\theta=-\frac{\pi}{2}} &= -[v(t)]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = A[(1-L)P(t)]^m r^{1-m} + D(t),
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

这里:

$$
\left.\begin{aligned}
&A = 0, && B = \frac{1}{16K_0^2} && \left(\mu = \frac{1}{2}\right), \\
&A = \frac{(2-m)\sin\frac{1}{2}l\pi}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)}, && B = \frac{l\cos\frac{1}{2}l\pi}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)} && \left(\mu > \frac{1}{2}\right), \\
&A = \frac{(2-m)\operatorname{sh}\frac{1}{2}\beta\pi}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)}, && B = \frac{\beta\operatorname{ch}\frac{1}{2}\beta\pi}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)} && \left(\mu < \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2.35}
$$

上面所得的关于$u(t)$和$v(t)$的公式在材料处于非綫性蠕变情况下,亦即$0 < \mu < 1$时是正确的。

我們指出,根据(2.34)和(2.35)在非綫性平方規律时,亦即在$\mu = \frac{1}{2}, m = 2$的时候,半平面所有的边界点在垂直方向得到刚性的瞬时位移,等于

$$
v(t) = -v(t) = D(t) \qquad 当\ \theta = \pm\frac{\pi}{2}.
$$

应用关系式(2.19),并根据(2.17)、(2.26)和(2.28),注意到

$$
\xi(\theta,t) = D_1^*(t)[\eta'(\theta,\mu)]^\mu = D_1^\mu(t)[\eta'(\theta,\mu)]^\mu,
$$

$$
H_1(\theta,t) = \frac{P(t)[\eta'(\theta,\mu)]^\mu}{K_0(m-1)^\mu J(\mu)}. \tag{2.36}
$$

我們得到应力$\sigma_r(t)$和$\sigma_z(t)$的最終形式为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r(t) &= -\frac{2P(t)[\eta'(\theta,\mu)]^\mu}{rJ(\mu)}, \\
\sigma_z(t) &= -\frac{P(t)[\eta'(\theta,\mu)]^\mu}{rJ(\mu)}, \\
\sigma_\theta(t) &= \tau_{r\theta}(t) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.37}
$$

www.cnki.net

这种形式对于任一确定的瞬时 $t=t_1$ 均与在文献[9]中給出的半平面在材料冪次硬化塑性条件下的应力公式相符合．这些公式也被 B. B. 索柯洛夫斯基用另外的方法求得[8]．

因此在所考虑的半平面的应力分布(2.37)与同一半平面对应于非綫性弹性理論的瞬时問題下的应力系同样地相符合，虽然变形速度在这里不是一个常数、而是变数、因为从伏尔泰拉积分方程(2.28)所确定的乘数 $D_4(t)$ 与时間 t 有关．在非綫性蠕变条件下，說明方程組(1.3)和(1.6)虽然是被了解为比通常意义更普遍的稳定蠕变的方程，但是它的問題在一般情况下可以用弹性比拟的方法归結为非綫性弹性理論的瞬时問題．

§3　蠕变理論的平面接触問題

1° 問題的提法及基本方程的推导

把非綫性弹性相似作为基础，本文研討了关于二物体在非綫性蠕变情况下的平面接触問題的解的一般形式，并用了应变和应力的冪次規律(1.6)．

二个具有蠕变性质的物体在外力作用下互相紧压在一起，在一点或沿一綫接触，外力的合力 p（图 2）垂直于 ox 軸并且通过原点．

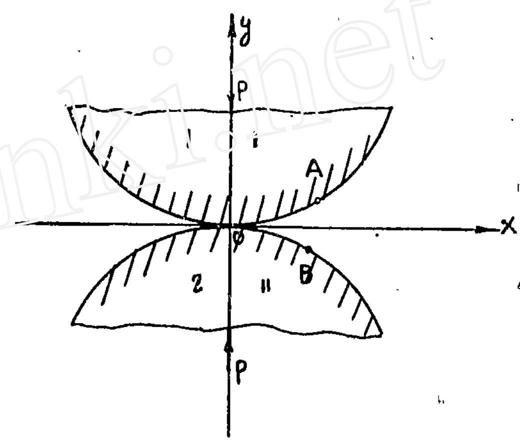

图　2

滿足接触区域的点位移的关系式为

$$v_1(t)+v_2(t)=\delta(t)-f_1^*(x)-f_2^*(x), \quad (3.1)$$

此处 $\delta(t)=\delta_1(t)+\delta_2(t)$ 表示二个物体在 oy 方向的接近，而 $f_1^*(x)$ 和 $f_2^*(x)$ 是第一和第二两物体的表面的方程．

进一步我們認为在二个压紧物体之間沒有摩擦和联結．此时任一物体接触部分将仅仅受到法向应力 $p(x, t)$．　但通常接触区域比起压紧物体的尺寸来說要小，因此可以認为，二受压物体接触部分的位移可看作是在同样的时間压力 $p(x, t)$ 作用下，二受压物体半平面（上物体和下物体的）边界上点的位移．

把作用在接触区 $s(a \leqslant x \leqslant b)$ 上的压力 $p(x, t)$ 的图形分解成宽度为 Δs_i 和高度为 $p(s_i, t)(i=1 \cdots n)$ 的单元条，并研究一下作用在下半平面这些宽条中的其中之一（例如 i — й）．

如果有一法向集中力 $p_i(t)=p(s_i, t)\Delta s_i$ 作用在半平面的边界 $x=s_i$ 的点上，那么在这个半平面边界上横坐标为 x 的点在 oy 軸方向产生的位移为 $v(t)$，根据公式(2.34)，

$$v(t)=A[(1-L)P_i(t)]^m|s_i-x|^{1-m}+D(t), \quad (3.2)$$

或另一种形式

$$v^*(t)=h_i(t)p(s_i,t)\Delta s_i. \quad (3.3)$$

这里，

$$h_i(t)=A^\mu|s_i-x|^{\mu-1}(1-L),$$
$$v^*(t)=[v(t)-D(t)]^\mu,$$

$$m=\frac{1}{\mu},\quad LP_i(t)=\int_{\tau_1}^{t}P_i(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{3.4}$$

在下面 $v^*(x,t)$ 称为半平面边界上点的一般位移.

在力系 $P_i(t)=p(s_i,t)\Delta s_i(i=1,2,3,\cdots n)$ 同时作用下，半平面边界上任意点的一般位移 $v^*(x,t)$ 在一般情况下是这些力的某一函数 $v^*(x,t)=v^*[P_1(t),P_2(t)\cdots P_n(t)]$. 这函数可以写成这样的形式：

$$v^*(t)=\sum_{j=1}^{i=n}C_j(t)p(s_j,t)\Delta s_j+\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{j=1}^{j=n}C_{jk}(t)p(s_k,t)p(s_j,t)\Delta s_k\Delta s_j+$$
$$+\sum_{v=1}^{v=n}\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{j=1}^{j=n}C_{vkj}(t)p(s_v,t)p(s_k,t)p(s_j,t)\Delta s_v\Delta s_k\Delta s_j+\cdots \tag{3.5}$$

这里 $C_j(t)$, $C_{jk}(t)$ 和 $C_{vkj}(t)$ 是一些与 x, $s_i(i=1,2,3\cdots n)$ 有关的系数，为简短起見，x, s_i 都省略了.

但是在另一方面，当仅有一个力作用时，那在当 $j\neq i$ 时 $P_i(t)=0$ 和 $j=i$ 时，$P_j(t)=P_i(t)$ 的时候，$v^*(t)$ 的表达式(3.5)应該与这个問題用公式(3.3)确定的点的精确解一致. 由于这样，将有

$$C_i(t)=h_i(t),\quad C_{ii}(t)=0,\quad C_{iii}(t)=0. \tag{3.6}$$

一般位移 $v^*(t)$ 的表达式采取的形式为

$$v^*(t)=\sum_{j=1}^{j=n}h_i(t)p(s_j,t)\Delta s_j+$$
$$+\sum_{j\neq k}^{n}C_{jk}(t)p(s_j,t)p(s_k,t)\Delta s_j\Delta s_k+\cdots\quad(i,k=1,\cdots,n) \tag{3.7}$$

由于接触区 $S(a\leqslant x\leqslant b)$ 很小，因此在与解該問題时同样的准确度上可以在一般位移 $v^*(t)$ 的表达式(3.7)中只取主要的展开項. 于是从表达式(3.7)經过轉换取极限，$\Delta s_i\rightarrow 0$ 后，我們得到

$$v^*(t)=A^{\mu}(1-L)\int_S\frac{p(s,t)ds}{|s-x|^{1-\mu}}. \tag{3.8}$$

此处积分沿全部接触区 $S(a\leqslant x\leqslant b)$ 进行，在一般情况下积分是时間的变数；而积分算子 L 和一般位移 $v^*(t)$ 由我們所得到的方程(3.4)所确定.

接触点的位移 $v(t)$ 为

$$v(t)=A\left[(1-L)\int_S\frac{p(s,t)ds}{|s-x|^{1-\mu}}\right]^m+D(t),$$

这里 $m=\dfrac{1}{\mu}$，而常数 A 根据(2.35)确定.

如果同样的法向压力 $p(x,t)$ 作用在上半平面的边界上，则边界点上具有横坐标 x 的点在 oy 軸方向的位移 $v(t)$ 等于

$$v(t)=-A\left[(1-L)\int_S\frac{p(s,t)ds}{|s-x|^{1-\mu}}\right]^m+D(t). \tag{3.9}$$

这样一来，上述表示第一和第二物体的位移 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 的公式根据(3.8)和(3.9)将

www.cnki.net

有：

$$\left.\begin{aligned} v_1(t) &= A_1\left[(1-L)\int_S \frac{p(s,t)ds}{|s-x|^{1-\mu}}\right]^m + D_1(t), \\ v_2(t) &= A_2\left[(1-L)\int_S \frac{p(s,t)ds}{|s-x|^{1-\mu}}\right]^m + D_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

这里

$$\begin{aligned} &A_1 = \frac{(2-m)\sin\frac{1}{2}l\pi}{K_{01}^m(m-1)J^m(\mu)}, \quad A_2 = \frac{(2-m)\sin\frac{1}{2}l\pi}{K_{02}^m(m-1)J^m(\mu)} \quad \left(\mu > \frac{1}{2}\right); \\ &A_1 = \frac{(2-m)\,\mathrm{sh}\frac{1}{2}\beta\pi}{K_{01}^m(m-1)J^m(\mu)}, \quad A_2 = \frac{(2-m)\,\mathrm{sh}\frac{1}{2}\beta\pi}{K_{02}^m(m-1)J^m(\mu)} \quad \left(\mu < \frac{1}{2}\right), \\ &A_1 = A_2 = 0 \quad \left(\mu = \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

这里 K_{01}, K_{02} 是第一、第二物体材料的物理常数.

将(3.10)所得的 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 表达式代入关系式(3.1)，得到下列决定压力 $p(x,t)$ 的积分方程：

$$\int_S \frac{p(s,t)ds}{|s-x|^{1-\mu}} - \int_{\tau_1}^t \int_S \frac{p(s,t)ds}{|s-x|^{1-\mu}} \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau} d\tau = [\gamma(t) - f_0(x)]^\mu, \tag{3.12}$$

这里

$$f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2};$$

而且 $f_0(x)$ 与 t 无关，$S(a \leqslant x \leqslant b)$ 是接触寬度，在一般的情况随时間而变，而 $\gamma(t)$ 是 t 的未知函数，有待以后加以确定.

积分方程(3.12)可以化为更紧凑的形式，即以下列二个积分方程的形式表示.

$$\omega(x,t) - \int_{\tau_1}^t \omega(x,\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau} d\tau = [\gamma(t) - f_0(x)]^\mu, \tag{3.13}$$

$$\int_S \frac{p(s,t)ds}{|s-x|^{1-\mu}} = \omega(x,t). \tag{3.14}$$

为了书写簡便起見，此处和以后用 $\omega(x,t)$ 表示积分方程(3.13)的解. 它依賴于变量 x 及 t，也依賴于这方程中右方出現的未知函数 $\gamma=\gamma(t)$，即 $\omega(x,t) = \omega^*[x,t,\gamma(t)]$.

这样一来，非綫性蠕变理論的平面接触問題(实质上是求二个变数的未知函数 $p(x,t)$ 的問題，这函数表征沿受压物体接触面上的压強分布)就化为同时解二个相互有关的积分方程(3.13)和(3.14)的問題.

其中 $\omega(x,t)$ 作为时間 t 的函数所必須滿足的第一个方程. 考虑到材料的蠕变对于接触力分布的影响，它是一个第二类伏尔泰拉积分方程，对于蠕变核 $K(t,\tau) = \dfrac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}$ 的各种不同的情形已在著作[2,3,10]中詳細地研究过了.

第二个积分方程(3.14)是 $P(x,t)$ 作为 x 的函数所必須滿足的，这积分方程是第一类弗雷霍姆奇异积分方程.

核为　　$K(s,x) = |s-x|^{\mu-1} \quad (0 < \mu < 1)$,

右方的 $\omega(x, t)$，是第一个积分方程(3.13)的解．第二个积分方程对于每一固定的 t 可以認为是某些非綫性弹性理論的平面接触問題的基本积分方程，其解法将在本节 2°—4° 段中提出．我們指出，当 $t=\tau_1$ 时，从非綫性蠕变理論的平面接触問題的基本方程(3.13)及(3.14)的一般解直接可以得到在文献[9]中給出的具有材料冪次硬化塑性理論的接触問題的解．

事实上，当 $t=\tau_1$ 时，按照(3.13)有

$$\omega(x, \tau_1)=\omega(x)=[\gamma-f_0(x)]^\mu,$$

积分方程(3.14)具有形式

$$\int_S \frac{p(s)ds}{|s-x|^{1-\mu}}=[\gamma-f_0(x)]^\mu. \tag{3.15}$$

象在文献[9]中所指出的，这也就是材料具有冪次硬化塑性理論的平面接触問題的基本积分方程．

如果 $C(t, \tau)\equiv 0$ 而 $\gamma(t)=\gamma=$ 常数，就是說受压物体的材料不具有蠕变，即我們又重新回到由方程(3.15)所描写的問題．

2° 非綫性蠕变理論平面接触問題的基本积分方程(3.14)的解．

設受压物体在 XOY 平面中的初始接触发生在一点，取該点为原点(图 2)．

进一步設在这些物体之間的接触区域 s（一般是随时間而变的）是 ox 軸的一段，$-a(t)\leqslant x\leqslant +a(t)$，于是平面接触問題的基本积分方程(3.14)化为

$$\int_{-a(t)}^{+a(t)} \frac{p(s, t)ds}{|s-x|^{1-\mu}}=\omega(x, t), \tag{3.16}$$

此处 $\omega(x, t)$ 是伏尔泰拉积分方程(3.13)的解．在各种不同蠕变核 $K(t, \tau)=\partial C(t, \tau)/\partial\tau$ 的情况，文献[2, 3, 10]中已作詳細的研究，因此此处不再去講它，此后将假設 $\omega(x, t)$ 是已知的或者由这些工作里发展的方法可以求得的．

如已經指出那样，$\omega(x, t)$ 在区域 $-a(t)\leqslant x\leqslant a(t)$ 及 $\tau_1\leqslant t\leqslant\infty$ 中是連續函数，也和出現在伏尔泰拉方程(3.13)的右方的 $\gamma(t)$ 有关；即

$$\omega(x, t)=\omega^*[x, t, \gamma(t)].$$

在 $\omega(x, t)$ 所加的限制，以及确定 $\gamma(t)$ 的方程，将在以后給出．

方程(3.16)最早由卡列曼[11]研究过．在最近发表的 H. H. 阿希叶泽尔及 B. A. 謝尔宾娜[12]中給出了利用奇异积分轉换公式来解这方程的另外一种方法．

本文使用了 M. Г. 克萊因[13]解第一类和第二类弗雷德霍姆积分方程所建議的方法来解积分方程(3.16)，这种积分方程具有下列形式的核：

$$K(s, x)=H(|s-x|). \tag{3.17}$$

运用这个方法在有一系列其他形式的核(3.17)时，可以得到这方程的閉合形式的解，而且对于已知的情形采用这种方法所得的解的特点，就是它不包含在柯希的意义下的奇异积分．

在这里应該指出，不含奇异积分的綫形弹性理論接触問題的解是由 H. A. 罗斯托夫节夫[14]首先得到的．

以 $g(s, a)$ 代表在 $\omega(x, t)=1$ 时方程(3.16)的解．于是按文献[13]方程(3.16)的一般解以下面的形式表示：

www.cnki.net

$$p(x, t)=\frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_{-a}^{+a} g(s, a)\omega(s, t)ds\right]g(x, a)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x}^{a} g(x, u)\frac{d}{du}\left[\frac{1}{M'(u)}\frac{d}{du}\int_{-u}^{+u} g(s, u)\omega(s, t)ds\right]du-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{x}^{a}\frac{g(x, u)du}{M'(u)}\int_{-u}^{+u} g(s, u)\omega'(s, t)ds, \tag{3.18}$$

此处

$$M(u)=\int_{0}^{u} g(s, u)ds, \quad \omega'(s, t)=\frac{\partial\omega(s, t)}{\partial s}. \tag{3.19}$$

$2a=2a(t)$ 是接触寬度，在一般情形下它是时間 t 的函数，但是为了书写簡单起見，t 在(3.18)中被略去了，$r(t)$ 是在积分方程(3.13)右方出現的时間的未知函数，因此

$$\omega(x, t)=\omega^{*}[x, t, \gamma(t)].$$

假如接触寬度 $2a(t)=2a$ 是給定的，則 $\gamma(t)$ 由平衡方程

$$P=\int_{-a}^{a} p(x, t)dx \tag{3.20}$$

所决定，此处 P 是作用在受压体上外力的合力，而按方程(3.16)的假設 P 是垂直于 ox 軸并通过坐标原点.

現在假設不存在阻碍受压物体旋轉的約束，在这些条件下，我們組成接触問題的基本方程.

連結受压物体边界点的位移 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 的公式(3.1)是在这样的假設下获得的，当压縮时物体只沿 oy 軸上发生直綫的位移 $\delta_1(t)$ 和 $\delta_2(t)$，而且此时物体的接近等于 $\delta(t)=\delta_1(t)+\delta_2(t)$.

現在設在物体受压时，除了沿 oy 軸的直綫位移 $\delta_1(t)$ 和 $\delta_2(t)$ 外，还有繞坐标原点的分别轉动，轉动角度是 $\alpha_1(t)$ 和 $\alpha_2(t)$，而且我們取反时針方向为正方向. 于是在受压物体边界上具有横坐标 x 的点就可以发生附加的接近等于 $\alpha_0(t)x$，这里 $\alpha_0(t)=\alpha_1(t)+\alpha_2(t)$. 为了要得到在这种情况下，受压物体接触点的位移 $v_1(t)$，$v_2(t)$ 应当满足的条件必須在(3.1)中将常数的接近 $\delta(t)$ 用变数的接近 $\delta_0(t)+\alpha_0(t)x$ 来代替，因此就有

$$v_1(t)+v_2(t)=\delta(t)+\alpha_0(t)x-f_1^{*}(x)-f_2^{*}(x). \tag{3.21}$$

从(3.10)将 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 的表达式代入(3.21)，就得到同样的积分方程(3.12)，不过右方不是函数 $F[x, t, \gamma(t)]=[\gamma(t)+f_0(x)]^{\mu}$，而是

$$F[x, t, \gamma(t), \alpha(t)]=[\gamma(t)+\alpha(t)x-f_0(x)]^{\mu}, \tag{3.22}$$

这里，

$$\alpha(t)=\frac{\alpha_0(t)}{A_1+A_2}, \qquad f_0(x)=\frac{f_1^{*}(x)+f_2^{*}(x)}{A_1+A_2}. \tag{3.23}$$

伏尔泰拉积分方程(3.13)的解我們仍然用 $\omega(x, t)$ 表示，但是它不是包含一个而是包含了两个未知函数 $\gamma=\gamma(t)$ 及 $\alpha=\alpha(t)$，也就是說，在这种情况下，$\omega(x, t)=\omega^{*}[x, t, \gamma(t), \alpha(t)]$，同时函数 $\gamma(t)$ 和 $\alpha(t)$ 的値在給定的接触寬度 $2a$ 内由下面的平衡方程决定：

$$P=\int_{-a}^{+a} p(x, t)dx, \quad M_0=\int_{-a}^{a} p(x, t)x dx, \tag{3.24}$$

此处 P 是所有作用在受压体外力在 oy 軸上的投影之和，而 M_0 是相对于坐标原点的外力总力矩。

我們指出，由工作 [13] 知道，如果 $M'(a) \neq 0 (0<a<b)$，此处 b 是某一有限常数，而 $\omega(x, t)$ 可微分到这样的程度，以致将它代入公式(3.18)时，包含这一函数的积分具有意义，那末公式(3.18)是方程(3.14)唯一可积分的解。

現在来确定函数 $g(s, a)$ 也就是解奇异的积分方程

$$\int_{-a}^{+a} \frac{g(s, a)ds}{|s-x|^{1-\mu}} = 1. \tag{3.25}$$

为此依照 M. Г. 克莱茵[15]，我們考虑积分

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2-a^2)^{\frac{\mu}{2}}(z-x)^{1-\mu}}, \tag{3.26}$$

此积分取在一周界上，这周綫包括半径为 R 的圓 Γ_R 和以 Γ_a 代表的内部周界 $ABCDEFKLGNMQA$（見图 3）。

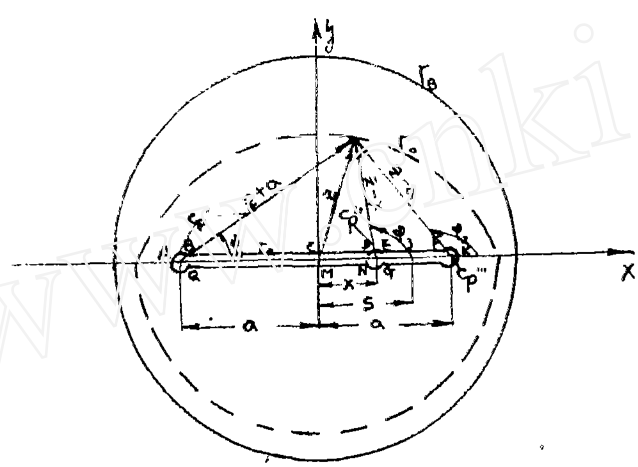

图 3

首先不难看到被积函数

$$f^0(z) = \frac{1}{f(z)} = (z^2-a^2)^{\frac{\mu}{2}}(z-x)^{1-\mu} \qquad 0<\mu<1.$$

在实綫段 $(-a, a)$ 上可分为三个相同的分支，事实上設 $\varphi_1 = \arg(z+a)$，$\varphi_2 = \arg(z-a)$ 和 $\varphi_3 = \arg(z-x)$，沿图 3 所示的閉合周綫 Γ_0 逆时針向走一周后，$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 取得增量 2π，因此，$\arg f(z) = \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)\mu + \varphi_3(1-\mu)$ 得到增量 2π，并且 $f(z)$ 恢复到初始的数值。

我們将考虑函数 $f(z)$ 的这样一个分支，它在 $(-a, a)$ 上岸取正值，即在 $z>0$ 时 $(z-x)^{1-\mu}>0$，$(z^2-a^2)^{\frac{\mu}{2}}>0$，这样，根据复联通区域的柯西定理，便有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a} f(z)dz = 0, \tag{3.27}$$

其中

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^{\frac{\mu}{2}}(z+a)^{\frac{\mu}{2}}(z-x)^{1-\mu}}. \tag{3.28}$$

但是当 $\rho\to 0$ 时，沿小圓周 C'_ρ, C''_ρ, C'''_ρ 的积分显然趋近于 0，因而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-a}^{+a} f(s+i0)ds+\int_{-a}^{+a} f(s-i0)ds\right]. \tag{3.29}$$

这里 $f(s+i0)$ 和 $f(s-i0)$ 是函数 $f(z)$ 在綫段 $(-a, a)$ 上下岸的值.

但是注意到 $f(s-i0)=\overline{f(s+i0)}$（这里一划代表共軛函数），并改变关系式(3.29)中第二个积分的积分方向，得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(z)dz=-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\operatorname{Im} f(s+i0)ds. \tag{3.30}$$

計算回路积分

$$I_1=\int_{\Gamma_R} f(z)dz, \tag{3.31}$$

其中 $f(z)$ 以公式(3.28)表示. 为此目的，我們应用函数 $f(z)$ 的分支在无穷远点附近的展开式.

根据(3.28)有

$$f(z)=\frac{1}{ze^{i\pi}}\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{\mu-1}, \tag{3.32}$$

其中 $\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}$ 与 $\left(1-\frac{x}{z}\right)^{\mu-1}$ 是指这些函数的这样的分支，它們在 ox 軸綫段 (a, ∞) 上是正的. 将后者按二項式公式展开，我們便找到所选 $f(z)$ 的分枝在无穷远点的留数，它等于 $-e^{-i\pi}$（$\frac{1}{z}$ 的系数取异号）于是根据留数定理得到

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz=-2\pi i e^{-i\pi}=2\pi i. \tag{3.33}$$

将这积分的値代入关系式(3.30)，得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\operatorname{Im} f(s+i0)ds=-1. \tag{3.34}$$

其次，根据(3.28)与图 3，有

$$\left.\begin{aligned} f(s+i0)&=\exp\left(-\frac{i\pi\mu}{2}\right)\frac{(a^2-s^2)^{-\frac{\mu}{2}}}{(s-x)^{1-\mu}} \quad &\text{当 } x<s+i0<a,\\ f(s+i0)&=\exp\left(-\frac{i\pi\mu}{2}\right)\frac{(a^2-s^2)^{-\frac{\mu}{2}}}{e^{i\pi(1-\mu)}(x-s)^{1-\mu}} \quad &\text{当 } -a<s+i0<x.\end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

将 $f(s+i0)$ 的算式(3.35)代入(3.34)，經过变换后我們最后得到

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}(a^2-s^2)^{-\frac{\mu}{2}}}{\pi|s-x|^{1-\mu}}ds=1. \tag{3.36}$$

由此直接得到

$$g(s, a) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi\mu}{2} (a^2 - s^2)^{-\frac{\mu}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{\pi\sqrt{(a^2 - s^2)^\mu}}, \tag{3.37}$$

这便是积分方程(3.25)的解.

应用公式(3.19)与(3.37),对于 $M(s)$,我們得到

$$M(s) = \frac{2\sqrt{\pi}\, s^{1-\mu}}{(1-\mu)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)}, \tag{3.38}$$

这里 $\Gamma(z)$ 是伽馬函数.

下面当研究受压物体在非綫性蠕变条件下的应力状态时，将分别考虑这些物体的对称承載与反对称承載的情况. 这一方面能給出易观察的公式，而另一方面，这些載荷的每一个也有它独特的意义，因为它相应于这些物体的一定特征的变形. 应当指出，对于受压物体的任意載荷的情形，正如公式(3.18),(3.13),(3.22)所表明，不能通过迭加上述两种情况得到，而必須把它当作一个独立的問題借助于一般公式(3.18),(3.13),(3.22)和(3.24)来求解.

3° 两物体在非綫性蠕变条件下的对称接触問題.

設包围受压物体的表面和作用在它上面的外力对于 oy 轴对称，于是这些曲面方程 $y = f_1^*(x)$, $y = -f_2^*(x)$ 将是 x 的偶函数，由此接触問題的积分方程(3.12)的右边 $F(x, t, \gamma)$ 也将是偶函数. 由于 $g(x, a)$ 与 $\omega(x, t)$ 是偶函数，公式(3.18)右端的最后一項消失，它变为

$$p(x, t) = \frac{1}{M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_0^a g(s, a)\omega(s, t)ds\right]g(x, a) - \\ - \int_x^a g(x, u)\frac{d}{du}\left[\frac{1}{M'(u)}\frac{d}{du}\int_0^u g(s, u)\omega(s, t)ds\right]du,$$

其中

$$M(a) = \int_0^a g(s, a)ds.$$

我們指出，在計算(3.39)中的第二个积分时，有时更方便地根据公式[13]，表示为另一种形式:

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{M'(s)}\frac{dI}{ds}\right] = \frac{1}{M(s)}\frac{d}{ds}\left[\frac{M^2(s)}{M'(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{I}{M(s)}\right)\right]. \tag{3.40}$$

将 $g(s, a)$ 与 $M(s)$ 的表达式(3.37),(3.38)代入(3.39),并应用等式(3.40),經过一番变換后得到

$$p(x, t) = K(\mu)\left\{\frac{a^\mu \Phi_1'(a, t, \gamma)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^\mu}} - \int_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^\mu}}\frac{d}{du}\left[u^\mu \Phi_1'(u, t, \gamma)\right]\right\}, \tag{3.41}$$

这里,

$$\Phi_1(u, t, \gamma) = \int_0^u \frac{\omega(s, t)ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}}, \quad \Phi_1'(u, t, \gamma) = \frac{d}{du}\int_0^u \frac{\omega(s, t)ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}}, \tag{3.42}$$

$$K(\mu) = \frac{\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi\mu}{2}\right)}{(1-\mu)\pi^2\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi\mu}{2}\right)^2}{2\sqrt{\pi}\,\pi^2}. \tag{3.43}$$

www.cnki.net

$2a=2a(t)$ 是变化的接触宽度，而且 $-a(t)\leqslant x\leqslant a(t)$，$\gamma=\gamma(t)$ 是出現在积分方程(3.13)右端的未知函数，它应在以后决定．我們提醒，

$$\omega(x,t)=\omega^{*}[x,t,\gamma(t)].$$

通过替换，$s=u\sin\varphi$，(3.42)中 $\Phi_1(u,t,\gamma)$ 的表达式可以表示成为下列的极限为常数的积分的形式：

$$\phi_1(u,t,\gamma)=u^{1-\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(u\sin\varphi,t)\cos^{1-\mu}\varphi d\varphi. \tag{3.44}$$

假定 $\omega(s,t)$ 当 $s>0$ 时存在着連續和有限的导数，在(3.44)的积分号下微分，我們得到

$$u\Phi_1'(u,t,\gamma)=(1-\mu)\Phi_1(u,t,\gamma)+\int_0^u\frac{\omega'(s,t)sds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}. \tag{3.45}$$

用部分积分法求上列的积分，注意到 $\omega'(0,t)=0$ 关系式(3.45)变为

$$u\Phi_1'(u,t,\gamma)=(1-\mu)\Phi_1(u,t,\gamma)+\frac{1}{2-\mu}\int_0^u(u^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}\omega''(s,t)ds. \tag{3.46}$$

由此微分一下，則有

$$\frac{d}{du}[u^{\mu}\Phi_1'(u,t,\gamma)]=u^{\mu-1}\frac{d}{du}\int_0^u\frac{\omega'(s,t)sds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}. \tag{3.47}$$

对(3.47)式右边用部分积分法进行积分，然后对 u 微分，由于 $\omega(x,t)$ 是偶函数，我們得到

$$\frac{d}{du}[u^{\mu}\Phi_1'(u,t,\gamma)]=u^{\mu}\int_0^a\frac{\omega''(s,t)ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}. \tag{3.48}$$

以此式代入表达式(3.41)，就得到 $p(x,t)$ 的最后公式如下：

$$p(x,t)=K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu}\Phi_1'(a,t,\gamma)}{\sqrt{(a^2-s^2)^{\mu}}}-\int_x^a\frac{u^{\mu}du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\int_0^u\frac{\omega''(s,t)ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\right\}, \tag{3.49}$$

此处 $\omega(x,t)$ 为伏尔泰拉积分方程(3.13)的解，它是未知数 $\gamma=\gamma(t)$ 的函数，即

$$\omega(x,t)=\omega^{*}[x,t,\gamma(t)],$$

而接触寬度 $2a$ 在一般情况与 t 有关．

公式(3.49)的第一項表示有奇异点 $x=\pm a$ 的解，而它只在給定接触寬度 $2a(t)=2a$ 时才应当保留，同时未知函数 $\gamma=\gamma(t)$ 由下列平衡方程决定：

$$P=2\int_0^a p(x,t)dx. \tag{3.50}$$

这个公式的第二項代表这个解的連續部份．

将 $p(x,t)$ 的表达式(3.49)代入平衡方程(3.50)，得到

$$P=2K(\mu)\left\{a\Phi_1'(a,t,\gamma)\frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{2(1-\mu)K(\mu)\pi}-\right.$$
$$\left.-\int_0^a dx\int_x^a\frac{u^{\mu}du}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\int_0^a\frac{\omega''(s,t)ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\right\}. \tag{3.51}$$

此处应用下列积分值：

$$I_2(u)=\int_0^u\frac{ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}}=\frac{M(u)\pi}{2\sin\frac{\pi\mu}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}\,u^{1-\mu}}{2(1-\mu)K(\mu)\pi}. \tag{3.52}$$

改变(3.51)后一項的积分次序,同时应用等式(3.52)和(3.43),我們有

$$P=\frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{(1-\mu)\pi}\left\{a\Phi_1'(a,\,t,\,\gamma)-\int_0^a u\,du\int_0^u\frac{\omega''(s,\,t)ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}}\right\}. \tag{3.53}$$

或者再一次改变积分次序,同时注意到

$$\int_s^a\frac{u\,du}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}}=\frac{(a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{(2-\mu)}. \tag{3.54}$$

求得

$$P=\frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{(1-\mu)\pi}\left\{a\Phi_1'(a,\,t,\,\gamma)-\frac{1}{2-\mu}\int_0^a(a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}\omega''(s,\,t)ds\right\}, \tag{3.55}$$

再利用关系式(3.46),方程(3.55)最后取如下形式.

$$\Phi_1(a,t,\gamma)=\frac{P\pi}{\sin\frac{\pi\mu}{2}}$$

$$\Phi_1(a,t,\gamma)=\int_0^a\frac{\omega(s,\,t)ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^\mu}}, \tag{3.56}$$

而 $\omega(x,\,t)$ 是伏尔泰拉积分方程(3.13)的解,这方程的右边部分为

$$F(x,\,t,\,\gamma)=[\gamma(t)-f_0(x)]^\mu\quad\left(f_0(x)=\frac{f_1^*(x)+f_2^*(x)}{A_1+A_2}\right),$$

而 A_1、A_2 是由公式(3.11)确定的物理常数.

这样,当接触寬度 $2a(t)=2a$ 給定时,出现在公式(3.49)的未知函数 $\gamma=\gamma(t)$ 由方程(3.56)确定. 当接触寬度 $2a(t)$ 沒有給定,而且接触沿平滑表面时,则未知函数 $\gamma=\gamma(t)$ 的确定,要求在公式(3.49)内代表具有奇异点的解的第一項消失,即

$$\Phi_1'(a,\,t,\,\gamma)=\frac{d}{da}\int_0^a\frac{\omega(s,\,t)}{\sqrt{(a^2-s^2)^\mu}}ds=0. \tag{3.57}$$

这里 $\omega(s,\,t)$ 是方程(3.13)的解,而 $2a=2a(t)$ 是变化的接触寬度. 这样,当接触寬度 $2a=2a(t)$ 沒有給定时,函数 $\gamma=\gamma(t)$ 由方程(3.57)决定.

在由(3.57)决定函数 $\gamma=\gamma(t)$ 以后,借助于平衡方程(3.50),我們找到变化的接触寬度 $2a(t)$. 把(3.49)的 $p(x,t)$ 表达式代入到(3.50),并且考虑等式(3.57),应用狄里赫里公式得到

$$\Phi_1(a,\,t,\,\gamma)=\frac{P\pi}{\sin\frac{\pi\mu}{2}}, \tag{3.58}$$

这里 $\Phi_1(a,\,t,\,\gamma)$ 由公式(3.42)确定.

因此,在当接触寬度 $2a(t)=2a$ 給定时,确定变化的接触寬度的方程(3.58)与确定函

www.cnki.net

数 $\gamma=\gamma(t)$ 的方程(3.56)完全符合.

作为一个应用实例，我們考虑关于具有給定宽度为 $2a$ 的直綫底座的刚性压模在非綫性蠕变的条件下半平面的接触問題.

在这种情况下

$$f_0(x)=0,\quad F(x,t,\gamma)=\gamma^{\mu}(t). \tag{3.59}$$

伏尔泰拉积分方程(3.13)的解 $\omega(x,t)$ 不再与 x 有关而可以表示成如下的形式:

$$\omega(t)=\gamma^{\mu}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\gamma^{\mu}(\tau)R(t,\tau)d\tau. \tag{3.60}$$

$R(t,\tau)$ 为蠕变核的預解式 $R(t,\tau)=\dfrac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}$，那就是松弛核.

把(3.60)的 $\omega(t)$ 代入方程(3.56)，且利用平衡方程(3.53)和(3.58)，我們得到如下积分方程来决定函数 $\gamma=\gamma(t)$:

$$\gamma^{\mu}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\gamma^{\mu}(\tau)R(t,\tau)d\tau=\frac{2P\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}}. \tag{3.61}$$

由方程(3.60)和(3.61)直接地找到方程(3.13)的解 $\omega(t)$ 不依賴时間 t，即

$$\omega(t)=\omega_0=\frac{2P\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}}, \tag{3.62}$$

$$\gamma^{\mu}(t)=\frac{2P\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}}\left[1+C(t,\tau_1)\right]. \tag{3.63}$$

这里，$C(t,\tau)$ 是半平面材料的蠕变量度.

把 $\omega(t)=\omega_0$ 值由(3.62)代入(3.49)，又根据(3.45)和(3.56)，

$$\Phi'(a,t,\gamma)=\frac{1-\mu}{a}\,\frac{P\pi}{\sin\frac{\pi\mu}{2}}. \tag{3.64}$$

确定压模接触面积上压力 $p(x,t)$ 的最后公式为

$$p(x,t)=p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin\frac{\pi\mu}{2}}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}}\,\frac{P}{\pi\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}}. \tag{3.65}$$

由所得解答(3.65)看出，假如压縮的物体之間沿直綫接触，那么这些物体材料的蠕变不影响在接触区域內的应力分布規律，并且与具有冪次硬化塑性理論的平面接触問題的应力値相符合[9].

当 $\mu=1$，即在綫性蠕变的条件下，公式(3.65)变成

$$p(x,t)=p(x)=\frac{P}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{3.66}$$

該公式和熟知的綫性蠕变理論和綫性弹性理論的平面接触問題的解〔1.16〕符合，显然，这两个理論在給定的情况下是完全一致的.

www.cnki.net

在結論里指出，假如受压物体之間不是沿直綫接触而是沿曲綫形的表面进行，那么材料的蠕变如公式(3.49)和(3.13)所指出，将影响到受压物体接触的应力分布图。

4° 关于非綫性蠕变条件下两个物体的反对称接触問題。

当反对称加载时方程(3.13)的右边部份

$$F(x, t, \alpha) = [\alpha(t)x - f_0(x)]^{\mu} \qquad \left(f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}\right) \tag{3.67}$$

[这里，$\alpha(t)$ 是某一个 t 的函数待以后确定，f_0 是奇函数，而 A_1 和 A_2 是由公式(3.11)决定的物理常数]。按照(3.22)，在受压物体的接触区域 $-a(t) \leqslant x \leqslant a(t)$ 内将是奇函数(这个情况下 $\gamma = \gamma(t)$ 等于零)，因此它的解 $\omega(x, t)$ 也将是奇函数，并且那时在公式(3.18)右边头两項消失而得到以下形式：

$$p(x, t) = -\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{g(x, u)}{M'(u)}\,du \int_0^u g(s, u)\omega'(s, t)ds. \tag{3.68}$$

把 $g(s, a)$ 和 $M(s)$ 的表达式(3.37)和(3.38)代入到(3.68)，得

$$p(x, t) = -\frac{K(\mu)}{2-\mu}\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{d}{du}\left[(u^2 - x^2)^{1-\frac{1}{2}\mu}\right]u^{\mu-1}\Phi_2(u, t, \alpha)du, \tag{3.69}$$

这里，

$$\Phi_2(u, t, \alpha) = \int_0^u \frac{\omega'(s, t)ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}}, \quad \Phi_2'(u, t, \alpha) = \frac{d}{du}\int_0^u \frac{\omega'(s, t)ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}}. \tag{3.70}$$

$K(\mu)$ 由等式(3.43)确定，而 $\omega(x, t) = \omega^*[x, t, a(t)]$ 是右边部分为(3.67)的伏尔泰拉的积分方程(3.13)的解。

由关系式(3.67)和(3.70)知 $p(x, t)$ 是奇函数，因此在区間 $0 \leqslant x \leqslant a(t)$ 内足够确定它，因为 $p(-x, t) = -p(x, t)$。

注意到函数 $\omega(x, t)$ 是方程(3.13)的解，也依賴于未知数 $\alpha = \alpha(t)$，后者为简单书写起見被省略掉，亦即 $\omega(x, t) = \omega^*[x, t, \alpha(t)]$。

对等式(3.69)的右边部分积分，再对所得的表达式对 x 取微分，得

$$p(x, t) = K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu-1}x\Phi_2(a, t, \alpha)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^{\mu}}} + x\int_x^a \frac{u^{\mu-2}[(1-\mu)\Phi_2(u, t, \alpha) - u\Phi_2'(u, t, \alpha)]du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^{\mu}}}\right\}. \tag{3.71}$$

类似方程(3.45)，在这个情况有

$$u\Phi_2'(u, t, \alpha) = (1-\mu)\Phi_2(u, t, \alpha) + \int_0^u \frac{\omega''(s, t)s\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}}. \tag{3.72}$$

把这个表达式代入(3.71)可得到 $p(x, t)$ 的最后形式

$$p(x, t) = K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu-1}x\varphi_2(a, t, \alpha)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^{\mu}}} - x\int_x^a \frac{u^{\mu-2}du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^{\mu}}}\int_0^u \frac{\omega''(s, t)s\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}}\right\}. \tag{3.73}$$

在公式(3.73)内第一项表示具有奇异点 $x = \pm a$ 的解，并且仅在給定的接触寬度 $2a(t) = 2a$ 的情况下应当保留，同时，函数 $\alpha = \alpha(t)$ 的値由下列平衡方程式确定：

$$M_0 = 2\int_0^a p(x, t)x\,dx. \tag{3.74}$$

把 $p(x, t)$ 的表达式(3.71)代入平衡方程(3.74)，得

www.cnki.net

$$M_0 = 2K(\mu)\left\{\frac{a^2}{2}\Phi_2(a, t, \alpha)B\left(1-\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \int_0^a x^2 dx \int_x^a \frac{u^{\mu-2}[(1-\mu)\Phi_2(u, t, \alpha) - u\Phi_2'(u, t, \alpha)]du}{\sqrt{(u^2-x^2)^\mu}}\right\}. \quad (3.75)$$

这里应用积分值

$$I_3(u) = \int_0^u \frac{s^2 ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}} = \frac{1}{2}B\left(1-\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}\right)u^{3-\mu},$$
$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (3.76)$$

改变关系式(3.75)第二項的积分次序，且利用等式(3.76)，得到

$$M_0 = K(\mu)B\left(1-\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}\right)\left\{a^2\Phi_2(a, t, \alpha) + \right.$$
$$\left. + (1-\mu)\int_0^a u\Phi_2(u, t, \alpha)\,du - \int_0^a u^2\Phi_2'(u, t, \alpha)du\right\}. \quad (3.77)$$

把(3.77)的右边部份最后一項进行分部积分，然后用变化积分的程序方法，并且利用等式(3.52)和(3.43)，最后得到联系函数 $\alpha = \alpha(t)$ 和外力力矩的方程

$$M_0 = \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{\pi(1-\mu)(2-\mu)}\int_0^a (a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}\omega'(s, t)ds. \quad (3.78)$$

这样，当接触寛度 $2a(t) = 2a$ 給定时，那末出現在解尔泰拉方程(3.13)的解 $\omega(x, t) = \omega^*[x, t, \alpha(t)]$ 中的未知函数 $\alpha = \alpha(t)$ 由方程(3.78)决定。

如果接触寛度 $2a(t)$ 沒有給出，接触又发生在光滑的表面，那未知函数 $\alpha = \alpha(t)$ 的决定要求(3.75)式代表奇异解的第一項消失，即

$$\Phi_2(a, t, \alpha) = \int_0^a \frac{\omega'(s, t)ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^\mu}} = 0. \quad (3.79)$$

因而，当接触寛度 $2a(t)$ 沒給出时，那么 $\alpha = \alpha(t)$ 可由(3.79)式决定，而未知的接触寛度 $2a(t)$ 可由(3.78)式决定。

作为一个应用問題，我們考虑关于平底剛性压模在非綫性蠕变条件下半平面受压的接触問題，平底的寛度 $2a(t) = 2a$ 之給定，作用在压模中心的力矩等于 M。在这情况，根据(3.22)式，我們可得

$$f_0(x) = 0, \quad F(x, t, \alpha) = \alpha^\mu(t)x^\mu. \quad (3.80)$$

那时伏特勒型的积分方程(3.13)的解 $\omega(x, t)$ 为

$$\omega(x, t) = x^\mu\left\{\alpha^\mu(t) + \int_{\tau_1}^t \alpha^\mu(\tau)R(t, \tau)d\tau\right\}. \quad (3.81)$$

这里 $R(t, \tau)$ 为蠕变核 $K(t, \tau) = \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$ 的預解式。

从方程(3.81)和(2.79)消去 $\alpha^\mu(t)$ 可直接找到方程(3.13)的解，$\omega(x, t)$ 不依賴于时間 t，且等于

$$\omega(x) = \frac{4M_0(1-\mu)}{\mu a^2}x^\mu. \quad (3.82)$$

把这个 $\omega(x)$ 値代入(3.74),并注意到

$$\int_0^{\mu} \frac{s^{\mu-1}ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\mu}{2}}. \tag{3.83}$$

我們把 $p(x,t)$ 的公式(3.74)引入为下列的形式:

$$p(x,t) = p(v) = \\ = \frac{2M_0\pi K(\mu)(1-\mu)}{a^2\sin\frac{\pi\mu}{2}}\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} + (1-\mu)x\int_x^a \frac{u^{\mu-2}du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\right\}. \tag{3.84}$$

这里的 $K(\mu)$ 由(3.43)式决定。

我們把(3.84)式中的第二項記作 $(1-\mu)I_4(x)$。 我們指出，$I_4(x)$ 是奇函数并且除去在 $x=0$ 这一点外在区間 $-a\leqslant x\leqslant a$ 內連續,同时,

$$I_4(+0) = -I_4(-0) = \lim_{x\to 0} x\int_x^a \frac{u^{\mu-2}du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}} \tag{3.85}$$

和

$$I_4(\pm a) = 0.$$

积分 $I_4(x)$ 在区間 $0\leqslant x\leqslant a$ 中对于 x 均匀收斂。 事实上,把 $I_4(x)$ 部分积分一下,可得

$$I_4(x) = \frac{a^{\mu-3}x(a^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{2-\mu} + \frac{3-\mu}{2-\mu}x\int_x^a \frac{(u^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{u^{4-\mu}}d\mu. \tag{3.86}$$

从那里而显地看到,积分 $I_4(x)$ 在区間 $0 < x\leqslant a$ 收斂。

当 $x\to +0$ 时,由(3.85)式經过积分变量置換 $u=\frac{x}{\xi}$ 后以及在条件 $\mu\leqslant 1$ 下，可直接得

$$I_4(+0) = -I_4(-0) = \int_0^1 (1-\xi^2)^{1-\frac{\mu}{2}}d\xi = \frac{\pi\sqrt{\mu}}{(1-\mu)\sin\frac{\pi\mu}{2}\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}. \tag{3.87}$$

以后,我們約定在 $x=0$ 点

$$I_4(0) = \frac{I_4(+0)+I_4(-0)}{2} = 0, \tag{3.88}$$

那么(3.84)式变成

$$p(v) = \frac{2M_0\pi K(\mu)(1-\mu)}{a^2\sin\frac{\pi\mu}{2}}\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} + (1-\mu)I_4(x)\right\} \quad (0 < x\leqslant a). \tag{3.89}$$

同时,

$$P(0) = 0.$$

把(3.86)式中的 $I_4(x)$ 值代入(3.89)中,把被积函数 $(u^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}$ 的分子按二項式进行分解并經过积分,得

$$P(x)=\frac{2M_0\pi K(\mu)(1-\mu)}{a^2\sin\frac{\pi\mu}{2}}\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^\mu}}+\frac{(1-\mu)a^{\mu-3}x(a^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{2-\mu}+\right.$$

$$\left.+\frac{(3-\mu)(1-\mu)}{2-\mu}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma\left(k-2+\frac{\mu}{2}\right)}{(2k-1)\Gamma(k)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1}\right]\right\}. \quad (3.90)$$

把(3.43)式中 $K(\mu)$ 的值代入(3.90)对于在压模下接触处的压力 $p(x)$ 最后可得到如下形式：

$$p(x)=\frac{2M_0\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin\frac{\pi\mu}{2}}{a^2\pi\sqrt{\pi}}\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^\mu}}+\right.$$

$$+\frac{(1-\mu)a^{\mu-3}x(a^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{2-\mu}+\frac{(3-\mu)(1-\mu)}{(2-\mu)}\times$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma\left(k-2+\frac{\mu}{2}\right)}{(2k-1)\Gamma(k)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1}\right]\right\} \quad (0\leqslant x\leqslant a). \quad (3.91)$$

同时

$$p(0)=0, \quad p(-x)=-p(x).$$

从(3.91)得到的解应該看到，在这种情况下，受压物体材料的蠕变不影响接触应力 $p(x)$ 的分布規律，因为在这些物体間是直綫接触的。

当 $\mu=1$，卽在綫性蠕变条件下 $p(x)$ 的公式(3.91)变成

$$p(x)=\frac{2M_0}{\pi a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad (3.92)$$

这和寬度为 $2a$ 的平板压模当作用在压縮中心的力矩为 M_0 的已知的綫性蠕变理論或綫性弹性理論中接触問題的解[17]（在这情况下，两者完全一致）是符合的。

［黄茂光、柯受全、李桃萼、穆霞英、卢錫年等譯校］

参 考 文 献

[1] Прокопович, И. Е., Плоская контактная задача с учетом ползучести. *ПММ* **20**, в. 6, 1956.

[2] Работнов, Ю. Н., Некоторые вопросы теории ползучести. *Вест. МГУ*, № 10, 1948.

[3] Арутюнян Н. Х., Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.

[4] Turner, F., Blomquist, K., A study of the applicability of Robotnov's creep parameter for alliminium alloy. *J. A. S.* **23**, No. 12, 1956.

[5] Жуков, А. М., Работнов, Ю. Н., Чурпков, Ф. С., Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести. *Инж. Сбор.* **17**, 1953.

[6] Johuson, A., The plastic, creep and relaxation of properties of metals. Aircraft Engg. **21**, No. 239, 1949.

[7] Шестериков, С. А., Об одном условии для законов ползучести, *Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Машин.*, № 1, 1959.

[8] Соколовский, В. В., Теория пластичности, Гостехиздат, 1950.

[9] Арутюнян, Н. Х., Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала, *Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. Наук*, в. 2, 1959.

[10] Розовский, М. И., О нелинейных уравнениях ползучести и релаксаций материалов при сложном напряженном состоянии, *Журнал тех. физики*, **XXV**, вып. 13, 1955. Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести к задаче о кручении цилиндра при больших углах крушки, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 6, 1959.

[11] Carleman, T., Über die Abelche Integralgleichung mit konstanten Integrations grenzen, *Math. Zert.* **15** (1922).

[12] Ахиезер, Н. И. и Щербина, В. А., Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Записки математического отделения физико-математического факультета и Харьковского математического общества, т. **XXV**, сер. 4, 1957.

[13] Крейн, М. Г., Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. *Докл. АН СССР*, **100**, № 3, 1955.

[14] Ростовцев, Н. А., К решению плоской контактной задачи, *ПММ*, **XVII**, вып. 1, 1953.

[15] Крейн, М. Г., Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. *Докл. АН СССР*, **94**, № 6, 1954.

[16] Штаерман, И. Я., Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.

[17] Флорин, В. А., Основы механики грунтов, **1**, Госстройиздат, Л.—М., 1959.

www.cnki.net