DOI:10.7631/issn.1000 - 2243.2013.05.0819 **文章编号**:1000 - 2243(2013)05 - 0819 - 04

无冗 K - 框架的一些性质

李婵娟, 朱玉灿

(福州大学数学与计算机科学学院, 福建 福州 350116)

摘要: 研究无冗 K - 框架的一些性质, 讨论无冗 K - 框架与 l^2 线性无关之间的关系, 给出无冗 K - 框架的等价关系, 并讨论无冗 K - 框架的算子刻画.

关键词: 无冗 K - 框架; 算子; 刻画; Hilbert 空间

中图分类号: O177.1 **文献标识码**: A

Some properties of exact K - frames in Hilbert spaces

LI Chan - juan, ZHU Yu - can

(College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350116, China)

Abstract: In this paper, we study some properties of exact K - frames. We discuss the relation between an exact K - frame and an l^2 - linearly independent family, and give an equivalent condition of exact K - frame. Lastly, we consider some characterizations of exact K - frame.

Keywords: exact K - frame; operator; depiction; Hilbert spaces

0 引言

在 Hilbert 空间中, 框架的概念最早是由 Duffin 和 Schaeffer[1] 在 1952 年研究非调和 Fourier 级数时正式提出的, 并且初步讨论了框架的一些性质. 目前, 框架理论及其应用已经被深入、系统地研究, 并且已经成为小波分析理论及其应用研究的重要数学工具, 在包括数据压缩[2], 采样理论[3], 图像处理[4], 系统建模[5] 等领域有着重要应用.

Hilbert 空间中的 K - 框架[6] 由 Gavruta 提出, 与原子系统之间存在着密切的关系, 是一种比 Hilbert 空间的框架更一般的框架. 关于框架的无冗性[7-9] 和算子刻画, 一些学者已经做了深入研究, 而 K - 框架的无冗性研究目前还比较少. 笔者主要对 K - 框架的无冗性及无冗 K - 框架的算子刻画进行研究和讨论.

在 Hilbert 空间中, 无冗框架与 Riesz 基是等价的, 无冗框架与 l^2 线性无关的框架也是等价的[10]. 如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 的框架, 则对于任意 $f \in H$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}(f_n)\rangle f_n$, 当 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为无冗框架时, 那么 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{S^{-1}(f_m)\}_{m=1}^{\infty}$ 是双正交序列(其中 S 是 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的框架算子), 即 $\langle f_n, S^{-1}(f_m)\rangle = \delta_{nm}$. 而对于无冗 K - 框架, 也可以利用无冗框架的这些性质来讨论无冗 K - 框架的性质. 首先可以得到无冗 K - 框架一定是 l^2 线性无关的 K - 框架, 但是 l^2 线性无关的 K - 框架不一定是无冗 K - 框架, 那么试想除了 l^2 线性无关这个条件, 还需要加什么条件, K - 框架就是无冗 K - 框架呢? 除此之外, K - 框架在某些算子的刻画下还是 K - 框架, 像 K - 框架中的算子 K 和可逆的算子 T, 根据上面得出的无冗 K - 框架的等价结论, 试想能否得出无冗 K - 框架在这些算子的刻画下还是无冗 K - 框架? 这些都是本研究要讨论的主要问题.

文中 H 表示 Hilbert 空间, Z^+ 表示正整数, $\boldsymbol{L}(H)$ 表示所有 H 中的有界线性算子的集合, I 为 H 中的恒等算子, K 是 H 中非零的有界线性算子.

收稿日期: 2012 - 04 - 11

通讯作者: 朱玉灿 (1963 -), 教授, E - mail: zhuyucan@fzu.edu.cn

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2012J01005)

定义 1 序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ 称为 H 的 K - 框架，如果存在正数 A、B，使得对任意 $f \in H$，有：

$$A\|K^*f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2$$

成立，分别称 A、B 为 K - 框架的下界、上界.

若仅有右边不等式成立，则称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列.

特别地，当 $K = I$ 时，K - 框架就是一般的框架.

定义 2 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的 K - 框架，去掉任意一个元素就不再是 H 的 K - 框架，则称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的无冗 K - 框架.

设 m 为正整数，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列，由文献[11]中定理 1 的证明知道广义和 $\sum_{n\in Z^+} a_n f_n$ 在 H 中收敛，因此可以定义有界线性算子 L 和 L_m 如下：

$$L: l^2 \to H,\ L(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n\in Z^+} a_n f_n \qquad (\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2) \tag{1}$$

$$L_m: l^2 \to H,\ L(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n\neq m} a_n f_n \qquad (\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2) \tag{2}$$

1 主要结论

在 Hilbert 空间中，无冗框架等价于 l^2 线性无关的框架. 那么，无冗 K - 框架是否 l^2 线性无关的 K - 框架？l^2 线性无关的 K - 框架是否也是无冗 K - 框架？为此，先给出几个引理.

引理 1[6] 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的 K - 框架当且仅当由式(1)定义的有界线性算子满足 $R(K) \subset R(L)$.

引理 2[6] 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的 K - 框架，则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Bessel 序列，且存在一个 Bessel 序列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得对任意的 $f \in H$，

$$Kf = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n\rangle f_n$$

引理 3[12] 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$，则下列叙述等价：

1) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 的无冗框架，且界为 A、B.

2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 的框架，界为 A、B，且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 l^2 线性无关的，即若 $\sum_{n\in Z^+} a_n f_n = 0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$，则 $a_n = 0$，$n \in Z^+$.

定理 1 无冗 K - 框架一定是 l^2 线性无关的 K - 框架.

证明（反证法） 假设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无冗 K - 框架，但是它是 l^2 线性相关的，则存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 不全为 0，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$，使得 $\sum_{n\in Z^+} a_n f_n = 0$. 不妨设 $a_m \neq 0 (m \in Z^+)$，由 $\sum_{n\in Z^+} a_n f_n = \sum_{n\neq m} a_n f_n + a_m f_m = 0$，得 $f_m = \frac{1}{a_m}(-\sum_{n\neq m} a_n f_n)$. 因为 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 K - 框架，由引理 1 知 $R(K) \subset R(L)$，其中 L 由式(1)定义，那么对于任意 $f \in R(K)$，有 $f \in R(L)$，则存在 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$，使得：

$$f = \sum_{n\in Z^+} b_n f_n = \sum_{n\neq m} \left(b_n - \frac{b_m}{a_m} a_n\right) f_n \tag{3}$$

由式(3)知，任意 $f \in R(K)$，有 $f \in R(L_m)$，故此 $R(K) \subset R(L_m)$，其中 L_m 由式(2)定义，由引理 1 知 $\{f_n\}_{n\neq m}$ 是 K - 框架，这与 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无冗 K - 框架矛盾. 故 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 线性无关 K - 框架.

注 1 定理 1 的逆命题不成立，即 l^2 线性无关的 K - 框架不一定是无冗 K - 框架. 下面举例说明.

例 1 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的标准正交基，令 $f_n = e_n (n \in Z^+)$，定义正交投影算子为：

$$K: H \to H,\ Kg = \langle g, e_1\rangle e_1 \qquad (g \in H)$$

则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 线性无关的 K - 框架，$K(H) = \overline{\text{span}}\{e_1\}$，但不是无冗 K - 框架.

事实上，因为$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是H的标准正交基，那么$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是l^2线性无关的. 由K是正交投影算子，则$K^*f = Kf = \langle f, e_1\rangle e_1, f \in H$，由于$f_1 = e_1$，从而$\|K^*f\|^2 = |\langle f, e_1\rangle|^2 = |\langle f, f_1\rangle|$，故此，对任意$f \in H$，有：

$$\|K^*f\| = |\langle f, f_1\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leqslant \|f\|^2$$

由此得到$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$为l^2线性无关的 K－框架. 又对任意$f \in H$，有：

$$\|K^*f\|^2 = |\langle f, e_1\rangle|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_{2n-1}\rangle|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2 = \|f\|^2$$

则$\{f_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$是$H$的 K－框架，故$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$不是无冗 K－框架. 即$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是$l^2$线性无关的 K－框架，但$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$不是无冗 K－框架.

注 2　对l^2线性无关的 K－框架，需要加上条件才等价于无冗 K－框架.

设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是H中的 K－框架，记：

$$\boldsymbol{F}_K = \left\{\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \middle| (1)\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \text{为 } H \text{ 的 Bessel 序列，} (2)\forall f \in H, Kf = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, g_n\rangle f_n\right\}$$

则由引理 2 得到：集合$\boldsymbol{F}_K$为非空.

定理 2　设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是H中的 K－框架，则$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是无冗 K－框架等价于：

1）$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是l^2线性无关；

2）存在$\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{F}_K$，使得对任意$n \in Z^+$，存在$h_n \in H$满足：$\langle h_n, g_n\rangle \neq 0$.

证明（必要性）　由定理1知$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是l^2线性无关的. 假设条件2）不成立，即对任意$\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{F}_K$，存在$m \in Z^+$，对任意$h \in H$，$\langle h, g_m\rangle = 0$. 由$\boldsymbol{F}_K$的定义知：对任意$f \in H$，$Kf \in R(K)$，且$Kf = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, g_n\rangle f_n = \sum_{n=1}^{m-1}\langle f, g_n\rangle f_n + \sum_{n=m+1}^{\infty}\langle f, g_n\rangle f_n$，由于$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$为$H$的 Bessel 序列，则$\{\langle f, g_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$，从而$R(K) \subset R(L_m)$，其中$L_m$由式(2)定义的. 由引理1知$\{f_n\}_{n\neq m}^{\infty}$为 K－框架，那么$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$就不是无冗的 K－框架，这与已知条件矛盾，所以条件2）成立.

（充分性）（反证法）　假设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$满足条件1）与条件2），但$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$不是无冗的 K－框架，即存在$m \in Z^+$，使得$\{f_n\}_{n\neq m}$是H的 K－框架. 由条件2）知，存在$\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{F}_K$，对前面的$m \in Z^+$，存在$h_m \in H$满足：$\langle h_m, g_m\rangle \neq 0$，且$Kh_m = \sum_{n=1}^{\infty}\langle h_m, g_n\rangle f_n$.

由于$\{f_n\}_{n\neq m}$是H的 K－框架，由引理1知，$R(K) \subset R(L_m)$，其中L_m由式(2)定义. 因为$Kh_m \in R(K) \subset R(L_m)$，则存在$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$，使得$Kh_m = \sum_{n\neq m} b_n f_n$，所以：

$$Kh_m - Kh_m = \sum_{n\neq m}(\langle h_m, g_n\rangle - b_n)f_n + \langle h_m, g_m\rangle f_m = 0$$

又因为$\langle f_n\rangle_{n=1}^{\infty}$是$l^2$线性无关的，所以得到：$\langle h_m, g_m\rangle = 0$，这与$\langle h_m, g_m\rangle \neq 0$矛盾，故$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是无冗的 K－框架.

注 3　特别地，当$K = I$时，如果条件1）成立，那么条件2）必定成立. 事实上，当$K = I$时，设S为$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$的框架算子，框架界为A，B，则$\{S^{-1}f_n\}_{n=1}^{\infty}$也是$H$中的框架，框架界为$B^{-1}$，$A^{-1}$，且$f = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, S^{-1}f_n\rangle f_n, f \in H$. 令$g_n = S^{-1}f_n(\forall n \in Z^+)$，则$\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{F}_K$. 因为$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是$l^2$线性无关的，所以$f_n \neq 0(\forall n \in Z^+)$，从而$\langle f_n, S^{-1}f_n\rangle \geqslant B^{-1}\|f_n\|^2 > 0$，即$\langle h_n, g_n\rangle = \langle f_n, g_n\rangle \neq 0$. 故定理 2 中条件 2）成立.

注 4　当 K－框架$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$仅仅满足定理2的条件2）时，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$也不一定是无冗 K－框架. 下面给出例子.

例 2　设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是H的标准正交基，取$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1, e_2, e_3, \cdots\}$，则：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2 = \|f\|^2 \qquad (f \in H)$$

因此，当 $K = I$ 时，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的 K - 框架，$Kf = f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n\rangle f_n$，且存在 Bessel 序列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $g_n = f_n$，对任意 $n \in Z^+$，存在 $h_n = f_n$，有 $\langle h_n, g_n\rangle = \langle f_n, f_n\rangle = \|f_n\|^2 \neq 0$. 而 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 线性相关的，由引理 3 知，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是无冗框架，从而 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就不是无冗 K - 框架($K = I$).

设 $K \in L(H)$，对于 H 的框架 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，则 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就是 H 的 K - 框架. 但是当 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无冗框架时，$\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就不一定是无冗 K - 框架了. 例子如下.

例3 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的标准正交基，令 $f_n = e_n$，$K: H \to \overline{\text{span}}\{e_1\}$ 为正交投影，则 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是 H 中的无冗 K - 框架.

事实上，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的标准正交基，则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的无冗框架. 因为 K 是 H 到 $\overline{\text{span}}\{e_1\}$ 的正交投影，所以 $Kf_n = \langle f_n, e_1\rangle e_1$. 则 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty} = \{e_1, 0, 0, \cdots\}$，那么 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 线性相关的. 由定理 2 知 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就不是 H 中无冗 K - 框架.

定理 3 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的无冗框架，则 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的无冗 K - 框架当且仅当 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 线性无关的.

证明 1)(必要性) 由于 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无冗 K - 框架，根据定理 2 知，$\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 线性无关的.

2)(充分性) 设 S 是 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的框架算子，框架界为 A，B，则：

$$A\|K^* f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle K^* f, f_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, Kf_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2 \qquad (f \in H)$$

从而 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的 K - 框架. 因为 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 线性无关的，只需证 $\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足定理 2 的条件 2) 即可. 由文献[10]中引理 5.1.5 和定理 5.1.6 知道：$\{S^{-1}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是 H 中的框架，框架界为 B^{-1}，A^{-1}，且 $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_n\rangle f_n$，$f \in H$. 故此 $Kf = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_n\rangle Kf_n$，$f \in H$，且 $\{S^{-1}f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{F}_K$. 由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的无冗框架，根据引理 3 知，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 线性无关的，所以 $f_n \neq 0$($\forall n \in Z^+$)，对任意 $n \in Z^+$，存在 $h_n = f_n \in H$，满足：

$$\langle h_n, S^{-1}f_n\rangle = \langle f_n, S^{-1}f_n\rangle \geqslant B^{-1}\|f_n\|^2 > 0$$

故由定理 2 知，$\{Kf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的无冗 K - 框架.

推论 设 $T \in L(H)$，T 是可逆的，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的无冗 K - 框架，则 $\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的无冗 TK - 框架.

证明 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的无冗的 K - 框架，K - 框架界为 A，B，则：

$$A\|K^*(T^* f)\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^* f, f_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, Tf_n\rangle|^2 \leqslant B\|T^* f\|^2 \qquad (f \in H)$$

即：

$$A\|(TK)^* f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, Tf_n\rangle|^2 \leqslant B\|T^*\|^2\|f\|^2 \qquad (f \in H)$$

所以 $\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的 TK - 框架.

由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的无冗的 K - 框架，根据定理 2 知，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 线性无关的，又 T 是线性同胚，则 $\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是 l^2 线性无关的.

因为 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无冗 K - 框架，由定理 2 知，存在 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{F}_K$，使得对任意 $n \in Z^+$，存在 $h_n \in H$，$\langle h_n, g_n\rangle \neq 0$，则 $TK(f) = T(Kf) = T(\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n\rangle f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n\rangle Tf_n$，即存在 $\{\tilde{g}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{F}_{TK}$，使得对任意 $n \in Z^+$，存在 $h_n \in H$，$\langle h_n, g_n\rangle \neq 0$. 根据定理 2 知，$\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的无冗的 TK - 框架.

(转第 827 页)

$-1)m+6)$ - 点可区别全染色. 故定理结论成立.

参考文献：

[1] Waldemar Szumny, Iwona Wloch, Andrzej Wloch. On the existance and on the number of (k, l) - kernels in the lexicographic product of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2008, 308: 4 616 - 4 624.

[2] Tian Shuang - liang. Star total colorings of Mycielski's graphs of balanced general join of graph[J]. Journal of Shandong University: Natural Science, 2009, 45(6): 23 - 26; 34.

[3] 田双亮，陈萍. 若干多重联图的边染色[J]. 南开大学学报：自然科学版，2007，40(3)：27 - 30.

[4] Chang G J, Huang Ling - ling, Zhu Xu - ding. Circular chromatic number of Mycielski's graphs[J]. Discrete Mathematics, 1999, 205: 23 - 37.

[5] Zhang Zhong - fu, Qiu Peng - xiang, Xu Boa - geng, *et al*. Vertex - distinguishing total coloring of graphs[J]. Ars Combinatoria, 2008, 87: 33 - 45.

[6] 张婷，吕新忠，徐文辉，等. 图 $C_m \cup W_n$ 的点可区别全色数[J]. 兰州大学学报：自然科学版，2008，44(6)：96 - 100.

[7] 安明强，刘信生，陈祥恩. 关于几类特殊图的 Mycielski 图的点可区别全色数[J]. 西北师范大学学报：自然科学版，2005，41(5)：4 - 7.

[8] Yap H P. Total coloring of graph[M]. New York: Springer - Verlag, 1996.

[9] Zhang Zhong - fu, Chen Xiang - en, Li Jing - wen, *et al*. On the adjcent - vertex - distinguishing total coloring of graphs [J]. Sci China: Ser A, 2005, 48(3): 289 - 299.

（责任编辑：林晓）

（接第 822 页）

参考文献：

[1] Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series[J]. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341 - 366.

[2] Eldar Y C. Sampling with arbitrary sampling and reconstruction spaces and oblique dual frame vectors[J]. J Fourier Anal Appl, 2003, 9 (1): 77 - 96.

[3] Daubechies I. Ten lectures on wavelets[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

[4] Heil C. A basis theory primer[M]. Boston: Birkhäuser, 2010.

[5] Dudey W N E, Partington J R. A construction of rational wavelets and frames in Hardy - Sobolev space with application to system modeling[J]. SIAM J Control Optim, 1998, 36(1): 654 - 679.

[6] Gavruta L. Frames for operators[J]. J Appl Comp Harm Anal, 2012, 32: 139 - 144.

[7] Farouki R T. Exact rotation - minimizing frames for spatial Pythagorean - hodograph curves[J]. Graphical Models, 2002, 64 (6): 382 - 395.

[8] Li J Z, Zhu Y C. Exact g - frames in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 2011, 374(1): 201 - 209.

[9] 丁明玲，朱玉灿. Hilbert 空间中的无冗 g - 框架[J]. 福州大学学报：自然科学版，2010，38(4)：461 - 468.

[10] Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases[M]. Boston: Brikhäuser, 2003.

[11] Cao H X. Bessel sequences in a Hilbert space[J]. Engineering Mathematics, 2000, 17(2): 92 - 98.

[12] Young R M. Introdution to nonharmonic Fourier series[M]. New York: Academic Press, 1980.

（责任编辑：沈芸）