

文章编号: 1000-4750(2014)08-0243-07

# 具有初始翘曲缺陷冷轧薄带钢板形 瓢曲变形行为研究

张清东, 卢兴福, 张晓峰

(北京科技大学机械工程学院, 北京 100083)

**摘 要:** 针对薄带钢冷轧生产过程中出现的翘曲复合瓢曲板形缺陷, 应用扁壳理论和伽辽金虚位移原理, 建立了非均匀载荷作用下屈曲变形解析计算模型, 求解获得了具有初始翘曲缺陷的带钢再发生瓢曲变形的屈曲临界载荷和临界波长, 讨论分析了初始翘曲对瓢曲变形的影响规律。计算结果表明, 随着带钢翘曲程度的增大, 瓢曲变形的屈曲临界载荷增大, 即越难出现瓢曲缺陷; 当翘曲为 C 翘缺陷时, 中浪型瓢曲的屈曲临界波长随翘曲值的增大而增大, 边浪型瓢曲的屈曲波长则随翘曲值的增大而减小; 当翘曲为 L 翘和四角翘时, 中浪和边浪型瓢曲的临界波长随着翘曲值的增大而减小。在实验轧机上进行轧制实验研究, 通过设计工况在铝板轧制中获得了翘曲复合瓢曲的板形缺陷模态, 验证了解析计算方法的正确性。同时, 运用 ANSYS 有限元法对实验轧制工况进行仿真分析, 获得了与实验结果基本一致的翘曲复合瓢曲的板形缺陷模态, 和与解析计算结果吻合良好的屈曲临界条件, 进一步证明了解析计算结果的准确性。

**关键词:** 冷轧带钢; 翘曲复合瓢曲; 屈曲; 解析法; 轧制实验; 有限元法

中图分类号: TG335.5 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.04.0340

## ANALYSIS OF BUCKLING DEFORMATION FOR THIN COLD-ROLLED STRIP WITH INITIAL WARPING DEFECT

ZHANG Qing-dong, LU Xing-fu, ZHANG Xiao-feng

(School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

**Abstract:** The mechanism and deformation behavior of warping composite buckling defects in a thin cold-rolled strip were studied. Based on the theory of shallow shells and Galerkin's virtual displacement principle, the analytical model of buckling for the strip with an initial warping defect was established, the critical buckling load and critical wavelength were obtained, and the influence rules of buckling affected by a warping defect were analyzed. The results show that the critical buckling load increases with the increase of the warping value. Under C warping, the critical wavelength of center buckling increases with the increase of the warping value, but the critical wavelength of edge buckling decreases with the increase of the warping value. Under L warping and C-L composite warping, the critical wavelength of center buckling and edge buckling decrease with the increase of the warping value. The mode of warping composite-buckling defects was obtained by designing cold-rolling experiments in a test mill, which proved the correctness of the analytical model. The simulation analysis for the conditions of rolling experiments was established by using ANSYS, the model of buckling was obtained, which was in a good agreement with the experimental results, and the critical buckling conditions of this buckling model were also achieved, which further verified the analytical calculation results.

收稿日期: 2013-04-16; 修改日期: 2013-06-06

基金项目: 国家科技支撑计划项目(2011BAE13B05); 国家自然科学基金项目(51075031)

通讯作者: 卢兴福(1986—), 男, 湖南人, 博士生, 主要从事板带钢板形控制研究(E-mail: me818@me.ustb.edu.cn).

作者简介: 张清东(1965—), 男, 北京人, 教授, 博士, 博导, 从事板带轧制工艺和塑性成形研究(E-mail: zhang\_qd@me.ustb.edu.cn);

张晓峰(1980—), 男, 北京人, 讲师, 博士, 主要从事轧制过程控制研究(E-mail: zxf1024@ustb.edu.cn).

**Key words:** cold-rolled strip; warping composite buckling defect; buckling; analytical method; rolling experiment; finite element method

板形是板带钢产品的主要质量指标,板形缺陷形式多种多样<sup>[1-3]</sup>,主要包括断面轮廓缺陷和平直度缺陷两大类。课题组根据产生机理不同,对平直度缺陷进行了分类,如图 1。瓢曲是板带钢纵向延伸(轧后塑性应变)沿宽度方向分布不均匀导致屈曲变形的结果;弯曲是板带钢纵向延伸沿厚度方向或宽度方向不均匀发生弯曲变形的结果。近年来,随着汽车工业、家电工业等产业的迅速发展以及用户对板带产品数量需求和质量要求的逐年提高,板形问题已日趋凸显,并得到国内外学者的高度关注和广泛研究<sup>[4-22]</sup>。对于瓢曲浪形缺陷,文献[4]提出板带的浪形缺陷可以归结为弹性薄板稳定性问题,其失稳是由于板内残余应力作用的结果;文献[5]根据轧制过程给定的基本参数获得了轧后带材纵向浪形形式和相应参数;文献[6]给出了各种张应力分布下对应的屈曲浪形形式;文献[7-9]对轧制过程中产生的残余应力导致的浪形缺陷进行了解析研究,获得了屈曲临界应力的表达式;文献[11]为代表的国内学者从理论、数值等方面对轧件前屈曲临界条件求解以及后屈曲变形规律进行了探讨。林振波等<sup>[12-13]</sup>采用有限条法对残余应力作用下的带钢进行了屈曲变形的数值求解;边宇虹等<sup>[14]</sup>采用三次样条函数构造了一个通用的浪形挠度函数,运用大挠度理论和能力最低原理对轧后带材屈曲变形进行了研究;卿伟杰等<sup>[15]</sup>采用有限元方法对带钢整体和局部屈曲及后屈曲路径进行了数值仿真研究。对于弯曲变形缺陷,文献[16]采用轧制试验的方法分析了辊径差对 L 翘的影响,文献[17-18]对现场产生 L 翘和 C 翘的产生原因进行分析。作者<sup>[19-22]</sup>对瓢曲和弯曲变形的研究也取得了丰富的理论和应用成果。

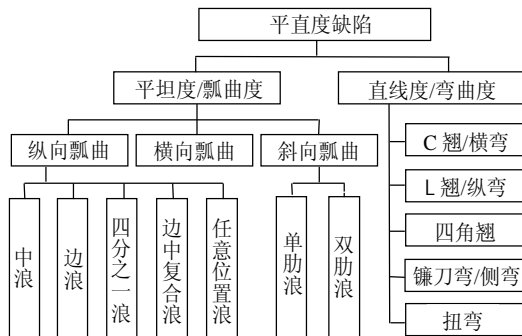


图 1 平直度缺陷分类

Fig.1 Classification of flatness and straightness defect

通过对上述学者工作的总结可以看出,到目前为止对瓢曲或者弯曲变形的单独研究已较多,并且在生产实际中得到较有效的控制。但是在冷轧工业生产中,带钢翘曲和瓢曲板形缺陷有时是同时存在的,且关于翘曲和瓢曲变形之间相互影响的研究尚未见诸文献。因此,研究轧后带钢翘曲和瓢曲之间关系是板形平直度缺陷研究的一个重要方面,对板形理论和工程实际应用都有十分重要的意义。本文将扁壳理论引入板形控制理论,应用壳体小挠度理论通过伽辽金虚位移原理建立非均匀载荷作用下翘曲带钢板形瓢曲变形的解析计算模型,分析初始翘曲带钢不同翘曲形式和翘曲值大小对生产现场常见的中浪、边浪瓢曲变形的影响规律,并通过轧制实验以及有限元仿真验证解析模型的正确性。

### 1 扁壳屈曲问题基本方程

扁壳和平板的区别在于扁壳具有初始曲率  $k_x$ 、 $k_y$  及扭率  $k_{xy}$ , 其对中面的薄膜性质有重要影响。因此,对于扁壳的小挠度弯曲和大挠度弯曲都要考虑中面薄膜力的作用<sup>[23]</sup>。由于扁壳屈曲变形特征也是弯曲变形,因而扁壳理论的屈曲变形几何关系、变形协调方程、平衡方程与其大挠度弯曲理论的方程相同。采用屈曲挠度  $w$  和应力函数  $F$  作为基本未知量,则扁壳屈曲变形协调方程为:

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 F = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1}$$

扁壳屈曲变形平衡方程为:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k_x \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \tag{2}$$

在扁壳屈小挠度屈曲分析中,屈曲前的应力状态为无矩状态,结合式(1)和式(2),可以得到扁壳屈曲基本微分方程。

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w + Ek_x^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2Ek_x k_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + Ek_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - s_x \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - s_y \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} -$$

$$2t_{xy}\nabla^4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)=0 \quad (3)$$

式中： $s_x$ 、 $s_y$ 、 $t_{xy}$  为扁壳前屈曲应力；

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-m^2)}$$

## 2 翘曲复合瓢曲变形临界条件求解

### 2.1 解析计算模型

对于底面为矩形的壳体，若其地面到顶点的高度(矢高)不超过底面短边的 1/5，即可以作为扁壳。显然对于具有初始翘曲缺陷的薄带钢，其矢高(即薄带钢的翘高，一般不超过 50mm)与底面短边的尺寸(即薄带钢的宽度，一般在 800mm 以上)显然要小于 1/5，因此对具有初始翘曲缺陷带钢的屈曲问题可以简化为扁壳的屈曲问题求解。以带钢中心为坐标原点  $o$ ，带钢宽度方向为  $x$  轴，长度方向为  $y$  轴建立坐标系。

设翘曲带钢的翘曲方程为：

$$z(x,y)=k_1x^2+k_2y^2+c \quad (4)$$

当  $k_2=0$ 、 $k_1\neq 0$  时，带钢为 C 翘，初始曲率  $k_x=k_1$ ；当  $k_1=0$ 、 $k_2\neq 0$  时，带钢为 L 翘，初始曲率  $k_y=k_2$ ；当  $k_1\neq 0$ 、 $k_2\neq 0$  时，带钢为四角翘，初始曲率  $k_x=k_1$ 、 $k_y=k_2$ 。

为获得问题的求解，采用伽辽金虚位移原理法，则有：

$$\int_{-a}^a\int_{-b}^b\left[\frac{D}{h}\nabla^4\nabla^4w+Ek_x^2\frac{\partial^4w}{\partial y^4}+2Ek_xk_y\frac{\partial^4w}{\partial x^2\partial y^2}+Ek_y^2\frac{\partial^4w}{\partial x^4}-s_x\nabla^4\frac{\partial^2w}{\partial x^2}-s_y\nabla^4\frac{\partial^2w}{\partial y^2}-2t_{xy}\nabla^4\left(\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)\right]w\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \quad (5)$$

### 2.2 临界条件求解

对于具有初始翘曲缺陷的薄带钢中浪瓢曲变形，取无限长翘曲带钢一个中浪半波周期作为研究对象，如图 2 所示，用一个半波周期内的屈曲特性反映整个翘曲带钢的屈曲特性。屈曲区域  $W[-b,b;-a,a]$ ；其中  $2b$  为翘曲带钢宽度， $2a$  值取决于轧制过程工艺周期。

根据现场翘曲带钢中浪几何形状，设中浪浪形模态函数为：

$$w=A\cos\frac{\pi x}{2b}\cos\frac{\pi y}{2a} \quad (6)$$

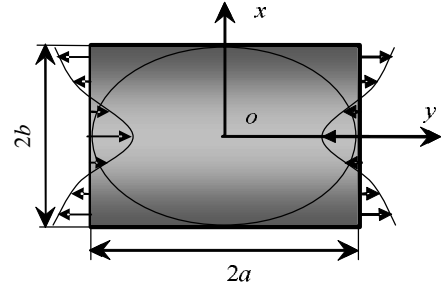


图 2 翘曲带钢中浪解析模型

Fig.2 Analytical model of centre wave for warping strip

通过对现场带钢冷轧生产过程中浪瓢曲缺陷的跟踪和应力仪采样，在带钢宽度方向屈曲区域受到压应力的作用，拟合采集应力点，根据文献[11]取其为三角函数分布形式，且应力满足自平衡条件，即：

$$\int_{-b}^b s_y h \mathrm{d}x = 0 \quad (7)$$

所以，取翘曲带钢屈曲前应力分布如下：

$$s_y = s \left[ \cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right) - \frac{2}{\pi} \right] \quad (8)$$

将式(6)和式(8)代入到式(5)中，即可获得翘曲带钢中浪屈曲临界条件的表达式：

$$s = \frac{E[(a^2+b^2)^4h^2\pi^4+192a^4b^4(1-m^2)(b^2k_x+a^2k_y)^2]}{32\pi a^2b^4(a^2+b^2)^2(m^2-1)} \quad (9)$$

对临界屈曲载荷求最小值，即有：

$$\frac{\partial s}{\partial a} = 0 \quad (10)$$

通过式(10)可以得到翘曲带钢屈曲临界半波长  $a$ ，将此值代入屈曲载荷  $s$  表达式中，即可得到翘曲带钢瓢曲变形的屈曲临界载荷  $s_{cr}$ ，实现临界条件的求解。

表 1 是翘曲薄带钢宽度  $2b=1000\text{mm}$ 、厚度  $h=0.5\text{mm}$ 、弹性模量  $E=2.1\times 10^5\text{MPa}$ 、泊松比  $m=0.3$  时，C 翘、L 翘以及四角翘带钢与平直带钢屈曲临界载荷和临界半波长的对比。从表 1 可以看出，有初始翘曲缺陷的带钢与平直带钢相比，其屈曲临界载荷有了不同程度的增大，这说明翘曲带钢相对与平直带钢难以出现瓢曲浪形缺陷；翘曲对带钢屈曲临界波长影响较大，除 C 翘缺陷带钢的中浪临界波长比平直带钢的中浪临界波长大，且屈曲波长大于屈曲宽度，其他情况下，屈曲临界波长都小于平直带钢的中浪临界波长。

表 1 翘曲带钢和平直带钢屈曲临界载荷和临界半波长的对比

Table 1 The contrast of critical buckling load and critical half wavelength between warping and straightness strip

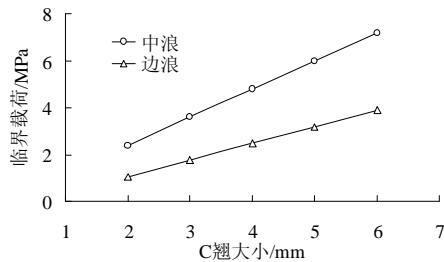
	平直带钢	C 翘		L 翘		四角翘	
		翘曲值 2mm	变化量/(%)	翘曲值 2mm	变化量/(%)	翘曲值 2mm	变化量/(%)
中浪临界载荷/MPa	0.8944	2.3957	167.8	1.3048	45.9	1.7258	92.9
中浪临界半波长/mm	500	869.87	74	312.75	-37.5	295.70	-40.9
边浪临界载荷/MPa	0.7354	1.0304	40.1	1.4792	101.1	1.5318	108.3
边浪临界半波长/mm	410.32	219.98	-46.4	228.895	-44.2	238.466	-41.9

### 3 翘曲复合瓢曲变形规律分析

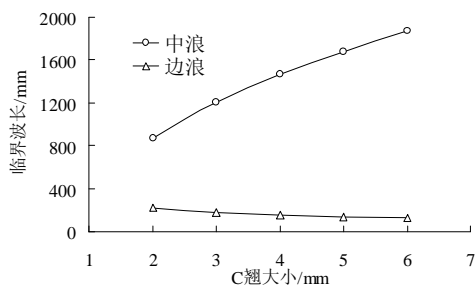
结合现场实际生产，取带钢弹性模量  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，泊松比  $m = 0.3$ ，宽度  $2b = 1000 \text{ mm}$ ，厚度  $h = 0.5 \text{ mm}$ ，分析翘曲复合中浪、翘曲复合边浪的变形规律。

#### 1) C 翘对瓢曲变形的影响。

图 3 是中浪、边浪屈曲临界条件随 C 翘值大小的变化曲线。



(a) 临界载荷与翘曲大小的关系



(b) 临界半波长与翘曲大小的关系

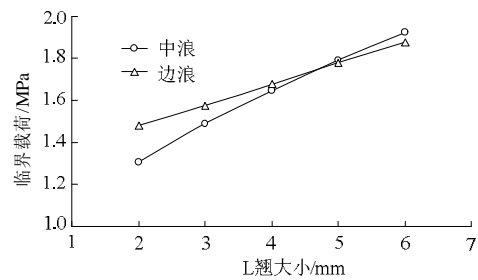
图 3 C 翘带钢屈曲临界条件与翘曲大小的关系

Fig.3 The relation between the critical conditions and warping value for C warping strip

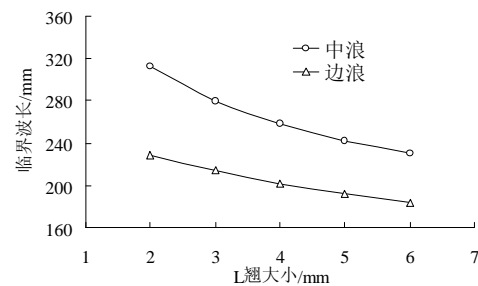
由图 3(a)可知，随着 C 翘值大小的增加，中浪、边浪屈曲临界载荷也增大，且中浪的屈曲临界载荷要大于边浪的屈曲临界载荷，这与现场在检查台上当带钢存在 C 翘时，常见翘曲与边浪的复合板形缺陷，而少见翘曲与中浪共存的情况是相符合的；由图 3(b)可知，中浪的屈曲临界波长随着翘曲值的增大而增大，而边浪的波长则随翘曲值的增大而减小。

#### 2) L 翘对瓢曲变形的影响。

图 4 是中浪、边浪屈曲临界条件随 L 翘值大小的变化曲线。从图 4 可知，随着 L 翘值大小的增大，中浪、边浪的屈曲临界载荷随着增大，临界波长则随着减小。



(a) 临界载荷与翘曲大小的关系

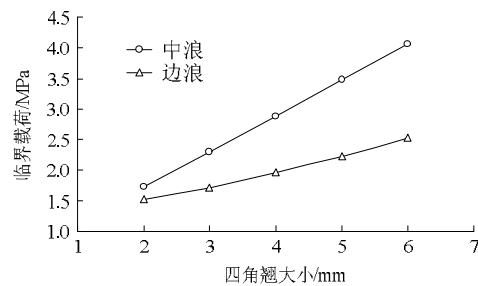


(b) 临界半波长与翘曲大小的关系

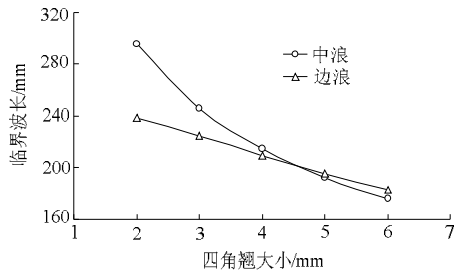
图 4 L 翘带钢屈曲临界条件与翘曲大小的关系  
Fig.4 The relation between the critical conditions and warping value for L warping strip

#### 3) 四角翘对瓢曲变形的影响。

图 5 是中浪、边浪屈曲临界条件随四角翘值大小的变化曲线。从图 5 可知，随着四角翘值大小的增大，中浪、边浪的屈曲临界载荷随着增大，临界波长则随着减小。



(a) 临界载荷与翘曲大小的关系



(b) 临界半波长与翘曲大小的关系

图5 四角翘带钢屈曲临界条件与翘曲大小的关系

Fig.5 The relation between the critical conditions and warping value for C-L composite warping strip

对比图3、图4、图5可知，C翘带钢对屈曲临界条件的影响最大，随着C翘值的增大，带钢中浪和边浪的屈曲临界条件有明显的变化，L翘和四角翘下带钢的屈曲临界条件变化较为平缓，且L翘影响最小；翘曲值变化对中浪屈曲临界条件的影响比对边浪临界条件影响更大。

#### 4 翘曲复合瓢曲轧制实验研究

为了验证解析计算方法的正确性，根据解析计算结果在四辊冷轧机上进行了轧制实验。

##### 4.1 轧制实验方案流程

轧件采用软态铝板，弹性模量  $E = 6.7 \times 10^4 \text{MPa}$ ，泊松比  $m = 0.3$ ，宽度  $2b = 270 \text{mm}$ ，厚度  $h = 0.4 \text{mm}$ ，轧后铝板厚度  $h' = 0.3 \text{mm}$ 。轧机上工作辊辊径为  $125 \text{mm}$ ，下工作辊辊径为  $120 \text{mm}$ ，通过辊径差实现带钢翘曲变形，产生L翘。通过ABAQUS有限元仿真获得带钢翘曲大小为  $18.67 \text{mm}$ ，应用解析计算模型获得L翘带钢发生中浪瓢曲变形的屈曲临界条件(临界载荷  $s_{cr} = 6.14786$ ，屈曲波长  $2a = 80.025 \text{mm}$ )，进而对工作辊辊形进行设计，最后通过轧制实验获得带钢L翘复合中浪屈曲浪形模式，其具体的轧制实验流程如图6所示。

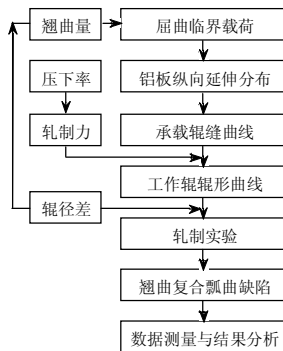


图6 轧制实验流程图

Fig.6 The diagram of rolling experiment

#### 4.2 轧制实验结果分析

通过冷轧轧制实验，得到了带钢L翘复合中浪瓢曲变形模式，如图7所示。测得带钢翘曲值为  $20.5 \text{mm}$ ，波长为  $2a = 70 \text{mm}$ 。与仿真和解析计算结果对比偏差分别为：翘高  $9.8\%$ ，波长  $12.5\%$ 。考虑到实验过程轧制力计算、辊形曲线设计、工作辊辊形曲线磨削等过程中均存在一定程度的误差，可以认为实验在一定程度上验证了翘曲复合瓢曲浪形解析计算方法的正确性。



图7 轧制实验获得的L翘复合中浪浪形模式

Fig.7 The L warping composite center wave mode for the rolling experiment

#### 5 实验工况的有限元仿真

在采用解析计算方法对实验工况进行研究的同时，由于临界载荷值在轧制过程不可测量，因此，应用ANSYS有限元软件对实验工况进行了仿真，以进一步验证解析计算结果。

对图7建立有限元模型，板宽度  $2b = 270 \text{mm}$ ，厚度  $h' = 0.3 \text{mm}$ ，长度  $L = 1000 \text{mm}$ ，L翘翘曲值大小为  $18.67 \text{mm}$ ，弹性模量  $E = 6.7 \times 10^4 \text{MPa}$ ，泊松比  $m = 0.3$ 。载荷形式通过施加温度应力场来给定带钢内部应力，温度分布函数同解析求解过程中载荷函数类型相同。约束模型中心点  $x$  和  $y$  两个方向的位移以及纵向两边  $z$  方向的位移。为了找到与轧制实验模式一致的有限元仿真模式，提取线性屈曲的前15阶模式，对比实测翘曲带钢中浪浪距 ( $70 \text{mm}$ )，发现有限元仿真第4阶屈曲模式(见图8)与轧制实验模式基本吻合，此模式的屈曲临界应力为  $5.34 \text{MPa}$ ，屈曲波长为  $90 \text{mm}$ ，与理论计算对比偏差分别为：临界应力  $13.1\%$ ，波长  $12.5\%$ 。可以认为有限元计算结果验证了解析计算结果的准确性。

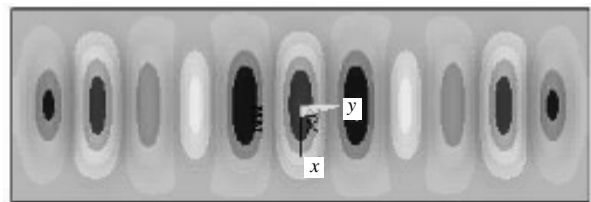


图8 有限元仿真模式

Fig.8 The simulation mode of FEM

## 6 结论

针对冷轧过程出现的翘曲复合瓢曲的板形缺陷的生成机理及力学条件进行了研究,取得如下主要研究结论。

(1) 将扁壳理论引入板形缺陷生成条件及过程的理论求解,应用壳体小挠度理论和伽辽金虚位移原理,建立了非均匀载荷作用下带钢产生翘曲复合瓢曲的板形缺陷的解析计算模型,实现了对具有初始翘曲缺陷的带钢再发生板形瓢曲的力学过程及临界条件的求解。理论研究结果表明:①随着翘曲值的增大,屈曲临界载荷增大,即带钢越难以发生瓢曲。②中浪型板形瓢曲的屈曲临界波长随着C翘值的增大而增大,边浪型板形瓢曲的临界波长则随C翘值的增大而减小;在L翘和四角翘情况下,中浪和边浪型板形瓢曲的临界波长随着翘曲值的增大而减小。③带钢C翘对瓢曲变形的临界条件影响最大,L翘的影响最小。④带钢翘曲值变化对中浪型板形瓢曲的屈曲临界条件的影响比对边浪型的影响大。

(2) 在实验轧机上开展了L翘复合中浪瓢曲的板形缺陷生成的模拟冷轧轧制实验研究,获得了理论模型预期的复合板形缺陷模态、翘曲高度以及屈曲波长,验证了解析计算模型及方法的正确性。

(3) 应用ANSYS有限元针对实验轧制工况进行仿真建模和分析,获得了与轧制实验一致的符合板形缺陷模态,并得到了与解析计算结果一致的对应的屈曲临界条件,进一步证明了解析计算结果的准确性。

### 参考文献:

- [1] 陈先霖. 新一代高技术薄带冷轧机的发展趋势[J]. 上海金属, 1995, 17(4): 1—8.  
Chen Xianlin. Development trend of the new generation of high-tech thin strip cold rolling mills [J]. Shanghai Metals, 1995, 17(4): 1—8. (in Chinese)
- [2] 张进之. 板形理论的进步与应用[J]. 冶金设备, 2001(1): 1—11.  
Zhang Jinzhi. Development and application of shape theory [J]. Metallurgical Equipment, 2001(1): 1—11. (in Chinese)
- [3] Mücke G, Karhausen K F, Pütz P D. Methods of describing and assessing shape deviation in strips [J]. MPT International, 2002, 25(3): 58—65.
- [4] Wistreich J G. Control of strip shape during cold rolling [J]. Journal of the Iron and Steel Institute, 1968, 206(12): 1203—1206.
- [5] Poplawski J V, Secombe D A. Bethlehem's Contribution to the Mathematical Modeling of Cold Rolling in Tandem Mills [J]. Iron Steel Engineer, 1980, 57(9): 47—58.
- [6] Roberts W L. Cold rolling of steel [M]. New York: CRC Press, 1978: 20—35.
- [7] Fischer F D, Rammerstorfer F G, Friedl N, et al. Buckling phenomena related to rolling and leveling of sheet metal [J]. International Journal of Mechanical Science, 2000, 42(10): 1887—1910.
- [8] Rammerstorfer F G, Fischer F D, Friedl N. Buckling of free infinite strips under residual stresses and global tension [J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(3): 399—404.
- [9] Fischer F D, Rammerstorfer F G, Friedl N. Residual stress-induced center wave buckling of rolled strip metal [J]. Journal of Applied Mechanics, 2003, 70(1): 84—90.
- [10] Tarnopolskaya T, Gates D J. Analysis of the effect of strip buckling on stability of strip lateral motion with application to cold rolling of steel [J]. Journal of Dynamic Systems, 2008, 130(1): 1—7.
- [11] 杨荃, 陈先霖. 轧制带材的瓢曲生成路径[J]. 北京科技大学学报, 1994, 16(1): 53—57.  
Yang Quan, Chen Xianlin. The deforming route of buckled waves of rolled strip [J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 1994, 16(1): 53—57. (in Chinese)
- [12] 林振波. 冷带轧机板形判别模型的有限条分析[D]. 秦皇岛: 东北重型机械学院, 1993.  
Lin Zhenbo. Finite strip method research on shape discrimination model in cold strip rolling mill [D]. Qinhuangdao: Northeast Heavy Machinery Institute, 1993. (in Chinese)
- [13] 林振波, 连家创. 冷轧带材临界屈曲问题的有限条法研究[J]. 东北重型机械学院学报, 1995, 19(4): 288—293.  
Lin Zhenbo, Lian Jiachuang. Finite strip method research on critical buckling problem of cold rolled strip [J]. Journal of Northeast Heavy Machinery Institute, 1995, 19(4): 288—293. (in Chinese)
- [14] 边宇虹, 刘宏民. 求解带材轧后大挠度屈曲变形的一个通用方法[J]. 机械工程学报, 1994, 30(增刊): 21—27.  
Bian Yuhong, Liu Hongmin. Universal method analyzing the large deflection buckling deformation of rolled strip [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1994, 30(Suppl): 21—27. (in Chinese)
- [15] 卿伟杰, 杨荃. 冷轧带钢整体和局部屈曲及后屈曲的有限元分析[J]. 北京科技大学学报, 2000, 22(4): 377—380.  
Qing Weijie, Yang Quan. Study on the cold rolled strip global and local buckling, post-buckling using the finite element method [J]. Journal of University of Science and

- Technology Beijing, 2000, 22(4): 377—380. (in Chinese)
- [16] Toshirou Fujwara, Tetsu Matoba, Yasuhiro Itazuri, et al. Improvement of high-strength steel sheet mechanical properties by rolling with small-diameter rolls [J]. Journal of the JSTP, 1997, 38(440): 819—823.
- [17] 何建峰. 宝钢镀锡板翘曲原因分析与对策[J]. 宝钢技术, 2004(1): 36—39.  
He Jianfeng. Cause analysis of tinplate warp and our countermeasures [J]. Bao Steel Technology, 2004(1): 36—39. (in Chinese)
- [18] 魏立群, 柳谋渊, 张杏耀, 等. 平整轧制中轧件 L 弯成因分析与对策[J]. 轧钢, 2003, 20(2): 20—22.  
Wei Liqun, Liu Mouyuan, Zhang Xingyao, et al. Analysis of the causes of L camber of strip in skin passing and its countermeasures [J]. Steel Rolling, 2003, 20(2): 20—22. (in Chinese)
- [19] 戴杰涛. 薄带钢板形翘曲与纵向瓢曲变形行为研究[D]. 北京: 北京科技大学, 2011.  
Dai Jietao. Deformation of warping and longitudinal buckling for thin and wide strip [D]. Beijing: University of Science and Technology Beijing, 2011. (in Chinese)
- [20] 戴杰涛, 张清东. 冷轧薄板中浪板形缺陷的屈曲及后屈曲理论与轧制试验研究[J]. 机械工程学报, 2011, 47(2): 44—50.  
Dai Jietao, Zhang Qingdong. Analysis and experiment on central buckling and post buckling of thin cold-rolled sheet [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(2): 44—50. (in Chinese)
- [21] 戴杰涛, 张清东, 秦剑. 薄宽冷轧带钢局部板形屈曲行为解析研究[J]. 工程力学, 2011, 28(10): 236—242.  
Dai Jietao, Zhang Qingdong, Qin Jian. Analysis of local buckling for thin cold-rolled strip [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(10): 236—242. (in Chinese)
- [22] 张清东, 戴杰涛. 带钢板形翘曲变形行为的仿真[J]. 北京科技大学学报, 2011, 33(8): 1006—1012.  
Zhang Qingdong, Dai Jietao. Simulation of warping deformation in thin steel strips [J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2011, 33(8): 1006—1012. (in Chinese)
- [23] 吴连元. 板壳稳定性理论[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996: 24—27.  
Wu Lianyuan. Plate stability theory [M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 1996: 24—27. (in Chinese)

(上接第 234 页)

#### 参考文献:

- [1] Nowell D, Dini D, Hills D A. Recent developments in the understanding of fretting fatigue [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2006, 73: 207—222.
- [2] 杨茂胜, 陈跃良, 郁大照, 等. 微动疲劳研究的现状与展望[J]. 强度与环境, 2008, 35(6): 45—54.  
Yang Maosheng, Chen Yueliang, Yu Dazhao, et al. Several key problems in studying on fretting fatigue [J]. Structure and Environment Engineering, 2008, 35(6): 45—54. (in Chinese)
- [3] 沈明学, 彭金方, 郑剑锋, 等. 微动疲劳研究进展[J]. 材料工程, 2010(12): 86—91.  
Shen Mingxue, Peng Jinfang, Zheng Jianfeng, et al. Study and development of fretting fatigue [J]. Journal of Materials Engineering, 2010(12): 86—91. (in Chinese)
- [4] Peng J F, Song C, Shen M X, et al. An experimental study on bending fretting fatigue characteristics of 316L austenitic stainless steel [J]. Tribology International, 2011(44): 1417—1426.
- [5] Peng J F, Shen M X, Zheng J F, et al. An experimental study on bending fretting fatigue characteristics of LZ50 railway axle steel [C]. Shanghai: East China University of Science and Technology Press, 2009: 495—499.
- [6] Ding J, Kang G Z, Zhu Y L, et al. Finite element simulation of bending fretting fatigue considering ratchetting and cyclic hardening [J]. Key Engineering Materials, 2013, 535—536: 197—200.
- [7] Zhu Y L, Kang G Z, Ding J, et al. Study on bending fretting fatigue of LZ50 axle steel considering ratchetting by finite element method [J]. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 2013, 36(2): 127—138.
- [8] Ryuichiro L, Masanori F. Fretting fatigue behaviour of Ti-6Al-4V alloy under plane bending stress and contact stress [J]. Tribology International, 2006, 39: 1181—1186.
- [9] Masanobu K, Naoki N, Chu S, et al. Fretting fatigue in hydrogen gas [J]. Tribology International, 2006, 39: 1241—1247.
- [10] 刘宇杰, 康国政, 高庆, 等. 调质 42CrMo 钢的棘轮-疲劳交互作用及其耦合损伤粘塑性本构模型[J]. 固体力学学报, 2009, 30(2): 109—115.  
Liu Yujie, Kang Guozheng, Gao Qing, et al. Ratcheting fatigue interaction of tempered 42CrMo steel and its damage-coupled visco-plastic constitutive model [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2009, 30(2): 109—115. (in Chinese)
- [11] Kang G Z, Liu Y J, Ding J, Gao Q. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled visco-plastic constitutive model [J]. International Journal of Plasticity, 2009, 25(5): 838—860.