

# 二维带限分形粗糙面电磁散射的基尔霍夫近似

郭立新, 吴振森, 柯熙政  
(西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

**摘要:** 本文采用二维归一化带限 Weierstrass 分形函数来模拟二维分形粗糙面, 主要利用基尔霍夫近似研究了该粗糙面的电磁散射, 给出了散射场、平均散射强度系数和散射强度方差的计算公式, 通过理论分析和数值计算讨论了散射场与分维及粗糙面其他有关参量间的关系。

**关键词:** 分形粗糙面; 基尔霍夫近似; 电磁散射

**中图分类号:** O451 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 09-0128-03

## Electromagnetic Scattering from 2D Band-limited Fractal Surface Using Kirchhoff Approximation

GUO Li-xin, WU Zhen-sen, KE Xi-zheng  
(School of Sciences, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** In this paper, a normalized two-dimensional band-limited Weierstrass fractal function is presented for modeling the rough surface, and an analytic solution of the scattering field from two-dimensional band-limited Weierstrass fractal surface is derived based on Kirchhoff theory. The scattering field, the average scattering coefficient and the variance of scattering intensity are given to study the influence of fractal dimension and other related parameters on the scattering field by theoretical analysis and numerical calculations.

**Key words:** fractal rough surface; Kirchhoff approximation; electromagnetic scattering

### 1 引言

随机粗糙表面电磁散射的理论和实验研究近年来取得了一系列重要的进展, 许多理论和工程上的问题需要对粗糙面散射问题进行研究<sup>[1,2]</sup>. 利用分形理论对粗糙面进行模拟, 它可集周期函数和随机函数的特性于一体, 其几何特征可以方便地被几个分形量来控制. 近年来有关分形粗糙面散射的研究越来越多, 如 Berry 等人研究了光波对分形粗糙面的衍射效应及脉冲波对随机粗糙面的反射作用<sup>[3]</sup>; J. A. Sanchez 等人对具有自仿射结构的金属分形粗糙面的极化效应和场增强效应做了研究<sup>[4]</sup>; M. F. M. Sanghadasa 等人利用 Kirchhoff 积分研究了具有大幅值起伏分形粗糙面的电磁散射<sup>[5]</sup>; A. Mendoza 等人利用耦合积分方程对具有沟槽状的分形表面散射作了计算<sup>[6]</sup>; 国内有关学者也开始将分形方法用于粗糙面的散射.

一般的粗糙面散射问题要求解一些非线性积分方程, 而且很难找到闭式解, 以往的方法都是通过找渐近解来替代真实解, 而采用分形的方法有可能便于问题的简化. 关于分形粗糙面的散射问题, 到目前为止对二维分形粗糙面的散射研究较少, 本文将利用所模拟的二维带限 Weierstrass 曲面, 采用 Kirchhoff 方法研究该粗糙面电磁散射特性与分维及粗糙面其它有关参量间的定量关系.

### 2 二维分形粗糙面散射场的一般表达式

已知重要的二维分形函数是 Weierstrass 曲面, 该曲面是一种维数  $D$  介于 2 和 3 之间的分形曲面, 它也满足自仿射的性质, 定义二维归一化带限 Weierstrass 分形函数为<sup>[7]</sup>:

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{2} [1 - b^{(2D-6)}]^{1/2}}{\{M [b^{(2D-6)N_1} - b^{(2D-6)(N_2+1)}] \}^{1/2}} \prod_{n=N_1}^{N_2} b^{(D-3)n} \prod_{m=1}^M \left\{ \sin \left[ Kb^n \left( x \cos \left( \frac{2\pi m}{M} \right) + y \sin \left( \frac{2\pi m}{M} \right) \right) \right] + \phi_{nm} \right\} \quad (1)$$

式(1)中  $b$  为粗糙面的高度起伏均方根. 利用归一化可以给出具有任意  $b$  的粗糙面  $F(x, y)$ .  $b$  为空间频域 ( $b > 1$ ),  $D$  为分维 ( $2 < D < 3$ ),  $K$  为空间波数, 它决定空间频谱的位置,  $\phi_{nm}$  为  $(0, 2\pi)$  上均  $D$  分布的随机相位. 该函数具有零均值,  $F(x, y)$  的无标度区间一般取  $[2 / (Kb^{N_1}), 2 / (Kb^{N_2})]$ .  $N = N_2 - N_1 + 1$  (代表谐波次数). 随着  $N$  的增加, 越来越多的频率分量加到该函数上. 当分维  $D$  增加时, 高频分量比重加大, 低频分量作用减小. 事实上, 该分形函数是确定性周期结构和随机结构的一个组合, 这一函数在  $M$  和  $N$  不太大的时候在  $x$  和  $y$  方向上是各向异性的, 它有自仿射结构和较大的偏导数, 这一分形粗糙表面为多测度表面. 由于自然界中实际的粗糙表面一般既不是纯随机的也不是完全纯周期的, 且经常是各向

异性的,因此式(1)所给的分形函数能较好地反映自然界中粗糙面的物理特性,是较好的物理模型.利用基尔霍夫公式二维分形粗糙面的散射场可表示为<sup>[8]</sup>:

$$sca(r) = -\frac{ik \exp(ikr)}{4r} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \exp[ikz(x, y)] \cdot dx dy + e \quad (2)$$

其中  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{2} \left( \frac{AA+BB}{C} + D \right)$  (3)

$$z(x, y) = Ax + By + CF(x, y) \quad (4)$$

$$A = (1 - R) \sin \theta_1 - (1 + R) \sin \theta_2 \cos \theta_3 \quad (5)$$

$$B = (1 + R) \cos \theta_3 - (1 - R) \sin \theta_2 \sin \theta_3 \quad (6)$$

$$C = (1 + R) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (7)$$

$$A = R_0 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_3) \quad (8)$$

$$B = R_0 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \quad (9)$$

$$D = R_0 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (10)$$

$$e = -\frac{ik \exp(ikr)}{4r} \left\{ \frac{iA}{kD} \int_{-L_x}^{L_x} [\exp ikz(L_x, y) - \exp ikz(-L_x, y)] dy + \frac{iB}{kD} \int_{-L_y}^{L_y} [\exp ikz(x, L_y)] - \exp ikz(x, -L_y)] dx \right\} \quad (11)$$

式(2)中  $sca(r)$  表示散射场,  $e$  项为边缘绕射场. 设二维分形粗糙面的尺度为  $-L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y, R_0$  为粗糙面的反射系数,这里仍然考虑金属导体表面情况,  $R = \pm 1$  分别对应入射波为平行极化和垂直极化情况.

忽略边缘效应,平均散射强度系数可以写为:

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \frac{1}{\cos^2 \theta_1} \left\{ [1 - \frac{1}{2} (kC)^2 \sin^2(kAL_x) \sin^2(kBL_y)] + \frac{1}{4} C_k^2 \sum_{n=N_1}^{N_1} \sum_{m=1}^M b^{2(D-3)n} \times \sin^2[(kA + Kb^n \cos \frac{2m}{M}) L_x] \sin^2[(kB + Kb^n \sin \frac{2m}{M}) L_y] \right\} \quad (12)$$

上式是平均散射强度系数的近似表达式. 散射场的统计参量  $I$  (强度方差)可以定义为:

$$I = [\bar{I}(r) - \overline{sca_0(r)}] / I_0$$

$$= \frac{\overline{sca(r) sca_0^*(r)} - \overline{sca(r)} \overline{sca_0^*(r)}}{\overline{sca_0(r) sca_0^*(r)} - \overline{sca_0(r)} \overline{sca_0^*(r)}} \quad (13)$$

其中  $sca_0(r)$  为光滑导体在镜反射方向的反射场 ( $\theta_1 = \theta_2, \theta_3 = 0$ ),它可由式(2)得到. 同样在忽略边缘效应的前提下,式(13)可表示为:

$$I = \frac{\overline{\sin^2[(kA + Kb^n \cos \frac{2m}{M}) L_x] \sin^2[(kB + Kb^n \sin \frac{2m}{M}) L_y]}}{4 \cos^2 \theta_1 \sum_{n=N_1}^{N_1} \sum_{m=1}^M b^{2(D-3)n} \sin^2[(kA + Kb^n \cos \frac{2m}{M}) L_x] \sin^2[(kB + Kb^n \sin \frac{2m}{M}) L_y]} \quad (14)$$

显然,  $I$  代表的是强度相关的非相干分量平均值,它主要用来分析除镜向以外的散射场,分形参量对其有显著的影响. 采用式(14)的优点在于只需考虑散射场和散射强度的平均效应而无需考虑较难获得的散射波前的相位项的影响.

### 3 分形粗糙面散射场与分形函数参量间的关系讨论

#### 3.1 粗糙表面尺度和空间波数的取值对散射场的影响

主要利用式(14)来计算散射场的平均非相干强度方差  $I$ , 在反射面内 ( $\theta_3 = 0^\circ$ ) 的变化规律. 首先计算了粗糙面尺寸大小对  $I$  的影响. 事实上,散射方向图随分形粗糙表面尺度的变化(即  $L_x, L_y$  的范围选取)对粗糙面的遥感有重要意义. 这里以波长作为内尺度,波长越短,要求模拟的粗糙面的精细程度越高,其外尺寸的选取也就必须足够大,这样分形的信息才能体现出来. 从纵向上讲,模拟的分形粗糙面的起伏与波长相比也不能太小,否则分维同散射分布特性的关系便不明显. 由计算结果可知表面尺度的大小决定散射场的波瓣宽度(尺度越大,波瓣越窄). 当表面尺度小于 1 个或几个空间周期时,散射方向图就不能提供足够的描述表面粗糙特征的信息,这是由于表面尺寸太小,不能完全反映分形表面的自相似性. 随着表面尺寸的增大,波峰的位置和数目变化不大,但波峰的宽度逐渐变小,当表面尺寸大于几十个空间周期后,散射方向图基本上不发生变化,因此在分析计算二维分形粗糙面的散射时,表面尺度不能选择太小,但也不需要太大(没有必要),只要能包含分形表面粗糙特征的全部信息即可, Jaggard 等人<sup>[9]</sup>在研究一维分形粗糙面的散射时也得到类似的结果. 在其它参量保持不变的情况下,还计算了  $I$  在不同空间波数  $K$ (空间周期)下的变化结果(如图 1(a), (b)所示), 图中  $D = 2.67, N_1 = 0, N_2 = 9, M = 10, \theta_1 = 30^\circ, b = 1.6$ , 入射角  $\theta_1 = 30^\circ$ . 从图中可以看出,空间波数  $K$  严重地影响着散射方向图,尤其对峰值的位置和数目有较大影响. 当  $K \leq 0.005$  时,波峰集中于散射场的特定镜反射方向上 ( $\theta_2 = 30^\circ$ ),在该方向以外,  $I$  迅速单调衰减,在这种情形下,入射波长远小于几十个空间周期,其计算结果趋近于几何光学近似. 当  $K \geq 10$  时,空间周期远小于入射波长,此时散射不满足基尔霍夫近似条件,该方法的计算结果并不可信,这时的分形粗糙面应被视为光滑理想导体表面,而当  $0.005 < K < 10$  时,在除反射方向峰值以外的某些位置上,出现了不同位置和数目的波峰,因此在研究二维分形粗糙面散射时在选取好适当的尺寸后,必须注意  $K$  的选取范围,而  $K$  的范围又与  $L_x, L_y$  选取有很大关系,因此在处理分形粗糙面散射场的时候,应将入射波长作为一个尺码. 只有在选定好  $L_x, L_y$  及  $K$  的情况下,才能较准确地确定散射场与分维  $D$  的关系打下基础.

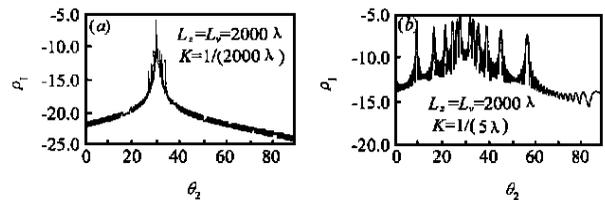


图 1  $I$  与空间波数  $K$  的关系

#### 3.2 标度区间 $N$ (谐波次数)、 $M$ 和分维 $D$ 对平均散射强度系数的影响

利用式(12)还计算了平均散射强度系数  $\bar{I}$  随  $N, M$  的变化,结果表明,  $N$  的变化对  $\bar{I}$  的影响不是很大,各峰值的空间位置几乎不变,只是峰值的大小有微小变化. 而当  $M$  较小时,散射主要集中在特定的平面和特定的方向上及其附近区域,随着  $M$  的增加,越来越多的次峰出现在远离特定方向的空间

位置上,限于篇幅,这里不再给出图示。

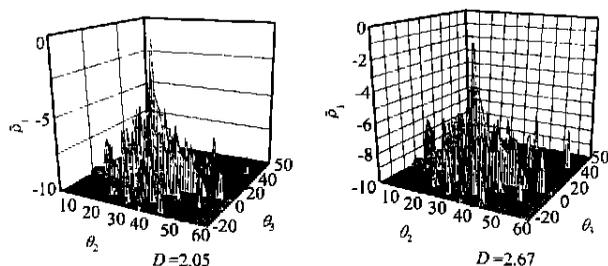


图2 平均散射强度系数  $\bar{\sigma}_i$  随分维  $D$  的变化

在图2中,给出了  $K=0.5$ ,  $b=1.6$ ,  $N=M=10$ ,  $\theta_1=30^\circ$ ,  $\sigma=0.05$  时的平均散射强度系数  $\bar{\sigma}_i$  随  $D$  变化的图形,其中  $L_x=L_y=40$ 。从图中可以发现,在其它参量固定不变的条件,  $D$  对  $\bar{\sigma}_i$  的影响主要是各峰值的大小和数目及位置。随着分维  $D$  的增加,在镜反射点以外会出现越来越多的旁瓣峰,且峰值的幅值是增大的。

同样采用式(14)计算不同分形维数  $D$  条件下在镜反射面内的  $\bar{\sigma}_i$  值,发现对于确定空间波数的分形粗糙面,在近前向散射范围内峰顶拟合线的斜率和分维  $D$  还有确定的线性关系,因此可以判定分维  $D$  是决定散射场方向图的决定性因素,可以通过散射方向图中峰顶拟合线斜率来定量表面的粗糙程度。该方法可应用于粗糙面重建的逆散射问题,也可用来进行粗糙表面的分类。

#### 4 结论

本文在采用二维归一化带限 Weierstrass 分形函数模拟二维分形粗糙面的基础上,主要利用基尔霍夫近似研究了该粗糙面的电磁散射,结果表明对于二维带限 Weierstrass 分形粗糙面,式(1)中的每一个参量和外尺度都影响着散射角分布,表面尺度不能选择太小,但也不需要太大。空间高频  $b$  和空间波数  $K$  决定着散射场中波峰的数目和位置,必须注意  $K$  的选取范围,而  $K$  的范围又与  $b$  选取有很大关系,应将入射波长作为一个尺码。求和数  $N$  和  $M$  也不能太小,否则粗糙面将变得非常光滑,分形的特征无法体现。在外尺度及空间高频  $b$  确定的情况下(在基尔霍夫近似条件以内),散射场波峰的数目、位置和大小随分维  $D$  的变化而变化。对空间波数确定的分形粗糙面,在近前向散射范围内峰顶拟合线的斜率和分维  $D$  还满足确定的线性关系,它对粗糙面遥感和测量等方面有着重要的意义。当然对于其它类型的分形粗糙面是否有类似的结论以及随机分形粗糙面电磁散射的实验验证还有待研究。

(上接第113页)

#### 参考文献:

- [1] J. M. Shapiro. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients [J]. Special Issue on Wavelets and Signal Processing, Dec. 1993, 41:3445 - 3462.

#### 参考文献:

- [1] A. Ishimaru. Wave Propagation and Scattering in Random Media [M]. Academic Press, New York, 1978.
- [2] F. T. Ulaby, et al. Microwave Remote Sensing [M]. Addison-Wesley Publishing, 1982, II.
- [3] M. V. Berry. Diffractal echos [J]. J. Phys. A, 1981, 14 (6): 3101 - 3110.
- [4] J. A. Sanchez-Gil, J. V. Garcia-Rams. Strong surface field enhancements in the scattering of p-polarized light from fractal metal surfaces [J]. Opt. Communications, 1997, 134: 11 - 15.
- [5] M. F. M. Sanghadasa, C. C. Sung. Scattering of electromagnetic waves from fractals of large amplitudes [J]. J. Appl. Phys., 1994, 75 (11): 7224 - 7226.
- [6] A. Mendoza, et al. Light scattering by a reentrant fractal surface [J]. Applied Optics, 1997, 36 (15): 3521 - 3530.
- [7] K. Falconer. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application. Wiley [M]. New York, 1990.
- [8] P. Beckmann, et al. The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces [M]. Pergamon, New York, 1963.
- [9] D. L. Jaggard, et al. Scattering from fractally corrugated surfaces [J]. J. Opt. Soc. Am., 1987, A7 (6): 1131 - 1139.

#### 作者简介:



郭立新 1968年出生,1993年在西安电子科技大学获理学硕士学位,1999年在中国科学院陕西天文台获理学博士学位,现为西安电子科技大学理学院副教授,发表学术论文30余篇,获国家科技进步三等奖一项,电子部科技进步一、二等奖各一项。目前主要从事电磁波和光波在随机介质中的传播和散射、军用目标激光散射特性研究及计算机电磁成像和非线性物理研究。



吴振森 1946年出生,现为西安电子科技大学理学院教授,博士生导师。近几年主要从事随机介质、非均匀介质中电磁(光)波的传播与散射、目标激光散射特性和电磁散射等方面的研究。

- [2] A. Said, W. A. Pearlman. A fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees [J]. IEEE Transaction on Circuits and Systems for Video Technology, June 1996, 6: 243 - 250.
- [3] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, I. Daubchies. Image coding using wavelet transform [J]. IEEE Trans. Image Processing, April 1992, 1: 205 - 220.