第 33 卷增刊(Ⅰ) 大地测量与地球动力学 Vol. 33 Supp. (Ⅰ)
2013 年 9 月 JOURNAL OF GEODESY AND GEODYNAMICS Sept. ,2013

文章编号:1671-5942(2013)Supp. (Ⅰ)-0160-03

# GPS 单历元模型病态方程解算方法研究*1

李慕清[1)] 刘正华[2)] 夏传甲[1)] 刘 刚[2)]

(1)中南电力设计院,武汉 430071
2)中国地震局地震研究所(地震大地测量重点实验室),武汉 430071)

**摘 要** 基于单历元模型的理论特点,利用 TIKHONOV 正则化方法改善法方程的病态性,从而提高模糊度浮点解的可靠性;再结合 LAMBDA 方法搜索,提高了模糊度浮点解的可靠性及整周模糊度固定的成功率。

**关键词** GPS 单历元模型;病态方程;模糊度;TIKHONOV;LAMBDA

**中图分类号**:P228.4 **文献标识码**:A

## ANALYSIS OF ILL-POSED EQUATION RESOLUTION TECHNIQUE FOR GPS POSITIONING IN EPOCH-WISE

Li Muqing[1)], Liu Zhenghua[2)], Xia Chuanjia[1)] and Liu Gang[2)]

(1) *Central Southern Electric Power Design Institute*, *Wuhan* 430071
2) *Key Laboratory of Earthquake Geodesy*, *Institute of Seismology*, *CEA*, *Wuhan* 430071)

**Abstract** On the basis of the features of GPS positioning in epoch-wise, TIKHONOV regularization has been used to improve the condition of ill-posed normal equation. As a result, the reliability of the ambiguity float solution is increased. And we improve the reliability of the ambiguity float solution and success rate of ambiguity integers fixing by combined with the LAMBDA algorithm.

**Key words**: GPS in epoch-wise; ill-posed equation; ambiguity; TIKHONOV; LAMBDA

## 1 引言

在单历元模型中,由于卫星的空间几何分布、时段和初始坐标的不准确,都会使观测方程间存在某种线性相关性,使得法方程阵不适定。传统固定方法很难有效克服这种病态性,从而难以搜索到准确的整周模糊度。刘根友[1]提出阻尼 LAMBDA 方法来解决法方程的病态和秩亏问题;王振杰等[2]针对单频单历元组成的法方程严重病态性,提出应用 Tikhonov 正则化方法来获取可信的浮点解,进而固定模糊度。

本文分析了单历元模型的理论特点,进而结合 LAMBDA 算法编写了短基线数据处理软件。实验表明:Tikhonov 正则化算法能提高模糊度浮点解可信度,结合 LAMBDA 方法[3,4],提高了模糊度浮点解的可靠性及整周模糊度固定的成功率。

## 2 单历元模型的理论特点

### 2.1 单历元模型

在一个时段内,待定点在地固坐标系中的位置随着时间的变化而变化,在进行数据处理时每个历元的待定点坐标均需作为一组未知参数,按历元逐个进行解算,这就是单历元模型。短基线(小于 10 km)双差观测方程线性化后为:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{l}, (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{v}$ 是 $m$ 维噪声向量,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是对应的模糊度和基线参数的设计矩阵,其维数分别是 $m \times n$ 和 $m \times$

* 收稿日期:2013-03-15
作者简介:李慕清,男,1965 年生,高级工程师,研究方向为工程测量. E - mail: Limuqing@ csepdi. com

3,$\boldsymbol{a}$ 是 $n$ 维的模糊度向量,$b$ 是 3 维的基线向量,$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 对应权矩阵和协因数矩阵。从式(1)可以看出,观测数小于未知数,法方程 $N$ 呈病态。条件数法是目前最为常用的一种度量病态性程度的指标[5]。病态性的严重程度依赖于法方程矩阵的最小特征值相对于最大特征值的大小。在单历元载波相位模型中,法方程矩阵的条件数很大。参数 $x$ 包含坐标三分量(实数)和整周模糊度(整数)两部分。对矩阵 $\boldsymbol{N}$ 做奇异值分解,

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{UDV}^{\mathrm{T}}$$

式中 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是正交矩阵,$\boldsymbol{D}$ 是奇异值矩阵。将 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 按照以下形式分块:

$$\begin{cases} \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \underset{n\times k}{U_1} & \underset{m\times(m-k)}{U_2} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \underset{3\times 3}{D_1} & \\ & \underset{(m-3)\times(m-3)}{D_2} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \underset{m\times k}{V_1} & \underset{m\times(m-k)}{V_2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$D_1$ 的三个奇异值接近于零,$D_1$ 和 $D_2$ 之间有一个比较大的跳跃,导致了矩阵病态,这就是单历元载波相位定位中法方程矩阵病态的共同特点。

## 2.2 单历元模型病态方程的解法

根据 Tikhonov 正则化原理,对应于式(1)岭估计的估计准则为:

$$\|c\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}\|^2+\alpha\Omega(\boldsymbol{x}) = \|c\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}\|^2+\alpha\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \|c\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}\|^2+\alpha\|\boldsymbol{x}\|^2 = \min \qquad (2)$$

对式(2)求导,得到岭估计的解为:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Pc}+\alpha\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Pl} \qquad (3)$$

$\hat{\boldsymbol{x}}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的估计值,$\alpha$ 是岭参数,$\boldsymbol{I}$ 是单位阵,$\|\cdot\|$是欧式 2-范数,$\Omega(\boldsymbol{x})$是稳定泛函。和最小二乘解相比,式(3)右端求逆部分增加了 $\alpha\boldsymbol{I}$ 一项。正是由于它的存在,法方程的病态性得到抑制,因而得到可靠的估值。在确定泛函 $\Omega(\boldsymbol{x})$ 和参数 $\alpha$ 后,根据 TIKNONOV 正则化方法可以解决病态问题。

泛函 $\Omega(\boldsymbol{x})$ 可以表示为:$\Omega(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Rx}$,式中 $\boldsymbol{R}$ 是正则化矩阵。在岭估计中,$\boldsymbol{R}$ 就是单位矩阵,这种方法简称为方案一。

$\boldsymbol{R}$ 还可以定义:取法方程矩阵 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Pc}$ 左上角的 3×3 阶子矩阵定位为 $\boldsymbol{R}_0$,令 $\boldsymbol{R}_1 = \dfrac{1}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{R}_0$,则正则化矩阵为:$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \underset{3\times 3}{R_1} & 0 \end{pmatrix}$。$\boldsymbol{R}$ 是 $m\times m$ 的奇异矩阵,系数 $\beta$ 是利用待定点近似坐标的偏差与相位观测值的精度比来选取的,参数 $\alpha$ 确定为 1 效果比较好,该定义方法简称为方案二。

基于 Tikhonov 正则化原理而推导方案一和方案二改善了法方程的结构:方案一对法方程的对角线元素进行修正;方案二对对角线元素前三项进行修正,这一点是对法方程的奇异值在第三项和第四项之间存在跳跃的一种修正。

## 2.3 单历元浮点解稳定性的评定标准

单位权中误差 $\sigma_0^2$ 的估值 $\hat{\sigma}_0^2$ 的计算式一般为:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV}}{f} \qquad (4)$$

在单历元模型中,误差方程的自由度为 -3,无法利用式(4)来评定。单历元模型形成的法方程矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的条件数较大,利用 Tikhonov 正则化算法修正后,条件数变小,可以利用条件数来衡量浮点解的稳定性。对于法方程矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的特征值满足:

$$\boldsymbol{Nx} = \boldsymbol{\lambda x}$$

得到:

$$(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{\lambda I})x = (\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{x}_1)(\boldsymbol{\lambda}-x_2)\cdots(\boldsymbol{\lambda}-x_n) = 0$$

假定 $x_1$ 最大,$x_n$ 最小,则条件数 $K = \dfrac{x_1}{x_n}$。那么 Tikhonov 正则化后,条件数 $K_1 = \dfrac{x_1+\alpha}{x_n+\alpha}$。

显然 $K_1 < K$,通过 Tikhonov 正则化算法修正后,法方程的病态性得到改善,模糊度浮点解的稳定性得到提高。

# 3 单历元模型软件的实现

实验数据来自于 2010 年 4 月 9 号在湖北省地震局仪器检定中心利用两台 TRIMBLE-5700GPS 接收机采集的 4 个小时的 1 秒采样率的数据。利用 teqc 对观测数据进行预处理,得到 30 秒采样率的观测数据,结合精密星历,联合同步的 IGS(International GPS Service)跟踪站(北京站,武汉站,拉萨站和昆明站),利用 BERNESE5.0 对观测数据进行处理得到点 A001 和点 B001 的精确坐标(试验场固定点坐标)。利用编写的数据处理软件对 A001-B001 基线处理,将点 A001 固定。数据采样率是 1 秒,采用单历元模型做了两个实验:利用载波相位观测值组成观测方程,采用 Tikhonov 正则化方法对法方程进行修正,结合 LAMBDA 算法对模糊度进行处理,处理了 40 个历元,成功率为 100 %;利用 C/A 码和载波相位观测值组成观测方程,结合 LAMBDA 算法对模糊度进行处理,成功率为 5 %。

图 1 为具体解算结果。单历元载波相位模型可以获得厘米级的定位精度,利用 Tikhonov 正则化法

则可以改善法方程矩阵,这是获得浮点解的关键。单历元载波相位观测模型结合 CA 码联合处理得到的定位精度在米级,利用 CA 码组成的联合方程虽然能够避免法方程的奇异性,但是 CA 码的精度直接影响了浮点解的精度,利用 LAMBDA 算法得到的模糊度的成功率明显下降。

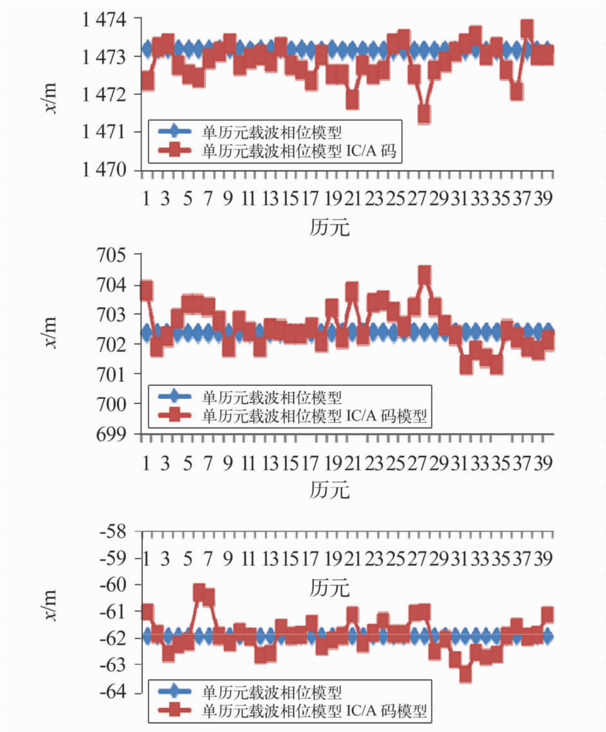


图 1 经 Tikhonov 方法修正后载波相位观测值与加入 C/A 码的三分量单历元定位结果

Fig. 1 Epoch-wise solutions of three components by carrier phase measures only and carrier phase measures with C/A code modified by Tikhonov regularization method

通过两组实验对比分析:加入 CA 码后坐标三分量的精度明显下降,从厘米级降到了米级,模糊度浮点解的精度明显下降,导致 LAMBDA 算法搜索效率下降。为进一步对比分析,选择第三个历元处理(表 1)。

实验结果表明,虽然单历元载波相位模型组成的法方程存在奇异性,但是利用 Tikhonov 正则化方法后,法方程不再奇异,其条件数比 CA 码联合解算低,获得的浮点解比较稳定且精度高,从而提高了模糊度搜索的成功率。

## 4 结语

本文分析了单历元模型的理论特点,进而结合 LAMBDA 算法编写了短基线数据处理软件。算例表明:采用 Tikhonov 正则化矩阵改善法方程的病态性,提高模糊度浮点解的可信度;再结合 LAMBDA 方法搜索,提高了模糊度浮点解的可靠性及整周模糊度固定的成功率。

表 1 第三个历元的处理结果对比

Tab. 1 Comparison of processing results in third epoch

| 实验 | 实验二 | 实验一 |
|---|---|---|
| 协因数阵条件数 | 1 850 | 472.211 7 |
| 协因数阵奇异值 | 0.150 349 | 0.207 501 494 |
| | 0.295 59 | 0.303 687 185 |
| | 0.867 215 | 0.502 404 738 |
| | 5.255 034 | 3.715 866 344 |
| | 5.255 035 | 3.715 868 463 |
| | 5.255 035 | 3.715 869 393 |
| | 5.255 038 | 3.715 869 728 |
| | 5.255 038 | 3.715 873 369 |
| | 5.255 038 | 3.715 875 914 |
| | 5.255 039 | 3.715 877 407 |
| 模糊度浮点解 | -141 448 3.03 | -141 448 2.02 |
| | -133 131 9.12 | -133 131 9.01 |
| | -253 970 3.03 | -253 970 6.16 |
| | -457 180 8.04 | -457 180 9.04 |
| | -569 750 4.23 | -569 750 7.13 |
| | -552 657 9.1 | -552 658 0.1 |
| | -578 099 4.25 | -578 099 6.17 |
| | -537 175 9.08 | -537176 0.07 |
| | -139 853 7.14 | -139 853 8.17 |
| | -136 898 4.08 | -136 898 2.09 |
| 固定模糊度 | -141 448 3 | -141 448 2 |
| | -133 132 1 | -133 131 9 |
| | -253 970 6 | -253 970 6 |
| | -457 180 9 | -457 180 9 |
| | -569 750 7 | -569 750 7 |
| | -552 658 0 | -552 658 0 |
| | -578 099 4 | -578 099 6 |
| | -537 175 9 | -537 176 0 |
| | -139 853 6 | -139 853 8 |
| | -136 898 5 | -136 898 2 |

## 参 考 文 献


1 刘根友,朱耀仲,韩保民. GPS 单历元定位的阻尼 LAMBDA 算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2004,29(3):195-197.

2 王振杰,欧吉坤,柳林涛. 一种解算病态问题的方法——两步解法[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2005,30(9):821-824.

3 Teunissen P J G. Theleast-squares ambiguity decorrel- ation adjustment:a method for fast GPS integer ambiguity estimation[J]. Journal of Geodesy,1995,70:65-82.

4 Jonge de. The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects[J]. Delf Geodetic Computing CentreLGR Series,1996,(12):562.

5 王大杰. 大地测量中不适定问题的正则化解法研究[D]. 中国科学院测量与地球物理研究所,2003.