用 Laguerre 模型的传递函数黑箱辩识

袁震东
(华东师范大学数学系，上海，200062)

摘 要 渐近黑箱辩识的理论是 Ljung L 和作者于 1985 年提出的[4]. 本文讨论了用 Lagurerrc 模型的传递函数黑箱辩识. 在一定条件下，证明了传递函数估计的一致性.

关键词 黑箱辩识；Laguerre 模型；传递函数估计的一致性

0 引言

Åström 和 Wittenmark 曾经指出[1]：一个逆稳定连续时间线性定常系统，如果其极点个数比零点个数大于 2，那么当采样间隔趋于零时，对应的离散系统将是逆不稳定的(即非最小相位的). 由此可见，采样间隔的大小对于系统的离散化至关重要.

模型的另一个重要因素是阶次. 1988 年，Clarke D W 给出了一个如何决定采样间隔和有限脉冲响应(FIR)模型阶次的拇指法则：采样间隔 T 必须小于时间常数. FIR 的阶次为 n，那么 nT 必须大于系统的的稳定时间，根据 Clarke 的法则，如果系统的稳定时间是系统时间常数 T_c 的 5 倍，采样间隔为 $1/10T_c$，那么 FIR 的阶次应为 50，即系统：

$$y(t)=G(q)u(t) \tag{1}$$

其中：

$$G(q)=\sum_{k=1}^{50} g_k q^{-k} \tag{2}$$

q^{-1} 是后移算符 . $G(q)$ 的阶次为 50，这对于控制器设计是不便的 . 为此，Wahlberg 于 1991 年提出把真系统展开成 Laguerre 级数，那所取的阶次将大大降低，且它对于采间隔大小是不灵敏的[2].

设实际系统为：

$$y(t)=G_0(q)u(t)+v(t) \tag{3}$$

其中：

$$G_0(q)=\prod_{k=1}^{\infty} g_K^0 B_K(q) \tag{4}$$

这里 $u(\cdot)$，$y(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 分别为系统的输入、输出和随机干扰，$B_k(q)$ 是 Laguerre 滤波器的数学描述；相应的 z 变换为：

$$B_k(z)=\frac{\sqrt{(1-a^2)T}}{z-a}\left(\frac{1-az}{z-a}\right)^{k-1} \tag{5}$$

论文 [3] 指出：当 a 满足 $a^2x-(|z_k|^2+1)a+x=0$，其中 $z_k=x+iy$，i 是虚单位，z_k 是原系统的导极点（本文假设 a 在辩识前事先算出并给定），则 (4) 的收敛最快 .

本文1993年5月3日收到

设辨识模型集取作:

$$G_d(z)=\sum_{k=1}^{d} g_k B_k(z) \tag{7}$$

这里 d 可以是样本大小 N 的函数，且当 $N\to\infty$，$d(N)\to\infty$. 这种不事先给定模型阶次，当采样数据数目增大时，阶次随之增大的方法称为黑箱方法．问题是如何利用数据辩识参数．

$$\theta^d=(g_1,\ \cdots,\ g_k)^T \tag{8}$$

并证明在一定条件下当$N\to\infty$时,

$$\sup_{-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi}|\hat{G}_N(e^{i\omega})-G_0(e^{i\omega})|\to 0 \quad a.s.$$

这里的$\hat{G}_N(e^{i\omega})$在下节说明.

1 参数估计和传递函数估计

引进

$$\varphi_d(t)=(B_1(q)u(t),\ \cdots,\ B_d(q)u(t))^T \tag{9}$$

模型集可写成:

$$m:\ y(t)=\varphi_d^T(t)\theta^d+v(t) \tag{10}$$

准则函数取作:

$$V_N(\theta^d,\ z^N)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[y(t)-\varphi_d^T(t)\theta^d]^2 \tag{11}$$

式中：z^N 表示所用到的 $u(\cdot)$，$y(\cdot)$. 使得准则函数 (11) 取最小值的 θ^d 是最小二乘估计,

$$\hat{\theta}_N^d=[R_d(N)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)y(t) \tag{12}$$

其中:

$$R_d(N)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)\varphi_d^T(t) \tag{13}$$

传递函数估计定义为:

$$\hat{G}_N(^{i\omega})=\sum_{k=1}^{d}\hat{g}_k B_k(e^{i\omega})=\bar{\omega}^*(\omega)\hat{\theta}_N^d \tag{14}$$

其中:

$$\bar{\omega}_d^*(\omega)=(B_1(e^{i\omega}),\ \cdots,\ B_d(e^{i\omega})) \tag{15}$$

这里i是虚单位.

2 收敛性分析

为了分析$\hat{G}_N(e^{i\omega})$的收敛性，引入如下假设: 输入是一个确定性序列，真系统为:

$$y(t)=G_0(q)u(t)+v(t)$$

其中:

$$G_0(z)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k^0 B_k(z) \tag{16}$$

$v(t)$是零均值弱平稳过程.

令:
$$\bar{\theta}^d_N = E\hat{\theta}^d_N, \quad \tilde{\theta}^d_N = \hat{\theta}^d_N - \bar{\theta}^d_N \tag{17}$$

式中：$\hat{\theta}^d_N$ 由 (12) 式给出；$E(\cdot)$ 表示数学期望，于是有：

$$\bar{\theta}^d_N[R_d(N)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)[G_0(q)u(t)] \tag{18}$$

$$\tilde{\theta}^d_N = [R_d(N)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)v(t) \tag{19}$$

再令:

$$\bar{G}_N(e^{i\omega}) = E\hat{G}(e^{i\omega}) = W^*_d(\omega)\bar{\theta}^d_N \tag{20}$$

$$\tilde{G}_N(e^{i\omega}) = \hat{G}_N(e^{i\omega}) - \bar{G}_N(e^{i\omega}) = W^*_d(\omega)\tilde{\theta}^d_N \tag{21}$$

因为:
$$|\tilde{G}_N(e^{i\omega})| \leqslant \|W^*_d(\omega)\|[R_d(N)]^{-1}\frac{1}{N}|\sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)v(t)|$$

如果:
$$|B_k(e^{i\omega}) \leqslant C_1 \tag{22}$$

那么:
$$|\tilde{G}_N(e^{i\omega})| \leqslant [R_d(N)]^{-1}C_1\frac{\sqrt{d(N)}}{N}|S(N,\ d(N))|$$

其中:
$$S(N,\ d(N)) = \sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)v(t) \tag{23}$$

欲证明 $\sup\limits_{-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi}|\tilde{G}_N(e^{i\omega})| \to 0 \quad a.s.(N\to\infty)$，只要证明 $[R_d(N)]^{-1}$ 有界和 $\frac{\sqrt{d(N)}}{N}|S(N,\ d(n))| \to 0$ 即可．

引理1　假定

① $|EV(t)V(s)| \leqslant C_3\lambda^{|t-s|} \qquad 0<\lambda<1$　　(24)

② $|u(t)| \leqslant C_2$　　(25)

③ $d=d(N)$: 当 $N\to\infty$，$d(N)\to\infty$，且 $d(N)$ 非降，$\frac{d^2(k)}{k}$ 非增，$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{d(k^2)}{k}\right]^2<\infty$，又

$$|\frac{d^2(k^2)}{k}| \leqslant C_4 \tag{26}$$

且 (22) 成立，C_1、C_2、C_3、C_4 均为常数，那么，当 $N\to\infty$ 时，

$$\frac{\sqrt{d(N)}}{N}|S(N,\ d(N)| \to 0 \qquad a.s. \tag{27}$$

证明　类似于论文[4]引理3.1之证明.

下面的定理给出了传递函数估计误差趋于零的条件．

定理1　如果引理1的条件全部满足且 $u(t)$ 满足下列持续激励条件:

$$\alpha_1 I_d \leqslant \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)\varphi^T_d(t) \leqslant \alpha_2 \tag{28}$$

其中：I_d 是 $d\times d$ 单位阵；α_1，α_2 为常数．当 $N\to\infty$ 时：

$$\sup_{-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi}|\tilde{G}(e^{i\omega})|\to 0 \qquad a.s.$$

证明 上面已经证得.

$$|\tilde{G}(e^{i\omega})|\leqslant[R_d(N)]^{-1}C_1\frac{\sqrt{d(N)}}{N}|S(N,\ d(N))| \tag{29}$$

由(28)得:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}[R_d(N)]^{-1}\leqslant \mathrm{Const}$$

由引理1，(27)式成立，故定理得证.

下面的定理给出$\hat{G}(e^{i\omega})$的一致性结果.

定理2 若定理1的条件成立且当$n\to\infty$时,

$$d(N)\sum_{k=d(N)+1}^{\infty}|g_k^0|\to 0 \tag{30}$$

那么，当$N\to\infty$时,

$$\sup_{-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi}|\hat{G}_N(e^{i\omega})-G_0(e^{i\omega})|\to 0 \qquad a.s. \tag{31}$$

证明 因为:

$$|\hat{G}_N(e^{i\omega})-G_0(e^{i\omega})|\leqslant|\hat{G}_N(e^{i\omega})-\bar{G}_N(e^{i\omega})|+|\bar{G}_N(e^{i\omega})-G_0(e^{i\omega})| \tag{32}$$

(32)右边第一项趋于零已由定理1证明. 经证(32)右边第二项也趋于零.

$$|\bar{G}_N(e^{i\omega})-G_0(e^{i\omega})|=W_d^*(\omega)\bar{\theta}_N^d-\sum_{k=1}^{\infty}g_k^0B_k(e^{i\omega}) \tag{33}$$

又:
$$\theta_0^d[R_d(N)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)\varphi_d^T(t)\theta_0^d$$

故:
$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k^0B_k(q)u(t)=\varphi_d^T(t)\theta_0^d+\tilde{u}_d(t) \tag{34}$$

其中:
$$\tilde{u}^d(t)=\sum_{k=d+1}^{\infty}g_k^0B(q)u(t)$$

因为 $|u(t)|\leqslant C_2$ 且 $B_k(q)$ 是稳定滤波器，因此：

$$|B_k(q)u(t)|\leqslant C$$

$$|\tilde{u}_d(t)|\leqslant C\sum_{k=d+1}^{\infty}|g_k^0| \tag{35}$$

再看

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_N^d-\theta_0^d&=[R_d(N)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)[\varphi_d^T(t)\theta_0^d+\tilde{u}_d(t)]-[R_d(u)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)\varphi_d^T(t)\theta_0^d\\&=[R_d(N)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_d(t)\tilde{u}_d(t)\end{aligned}$$

由上式和(35)可得:

$$|\bar{\theta}_N^d - \theta_0^d| \leqslant \|[R_d(N)]^{-1}\| C\sqrt{d(N)} \sum_{k=d+1}^{\infty} |g_k^0| \tag{36}$$

所以：

$$\begin{aligned} |\bar{G}_N(e^{i\omega}) - G_0(e^{i\omega})| &\leqslant |W_d^*(\omega)(\bar{\theta}_N^d - \theta_0^d)| + |\sum_{k=d+1}^{\infty} g_k^0 B_k(e^{i\omega})| \\ &\leqslant \|W_d^*(\omega)\| |\bar{\theta}_N^d - \theta_0^d| + C_1 \sum_{k=d+1}^{\infty} |g_k^0| \\ &= Cd(N) \sum_{k=d+1}^{\infty} |g_k^0| + C_1 \sum_{k=d+1}^{\infty} |g_k^0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

定理2得证.

3 结论

利用 Laguerre 滤波器由(3)、(4)来描述系统，相应地用有限项 Laguerre 级数作为模型集. 这样的模型集关于采样间隔和系统阶次是不灵敏的(即鲁棒的)，而且在低频部分与真系统的拟合比用 FIR 好. 本文讨论了 Laguerre 模型辨识线性系统传递函数之方法. 在一组合理的条件下，证明了这种传递函数估计的一致性(Consistancy). 因此，这样的方法是有其坚实的理论基础的.

本研究得到国家自然科学基金资助，谨此致谢.

参考文献

1 Aström K J, Wittenmark B. Computer controlled systems. Prentice-Hall Inc, 1984. 55～60

2 Wahlberg B. System identification using Laguerre models. IEEE Trans on AC, 1991, 36(5): 551～567

3 袁震东，王 昶，丁 晟. 具有鲁棒性的模型集. 见：上海市自动仪学会编. 上海自动化学会'92年会议文集，上海，1992. 76～80

4 Ljung L, Yuan Z D. Asymptotic properties of black-box identification of transfer functions, IEEE Trans on AC, 1985, 30(6): 514～530

Black-Box Identification of Transfer Functions Using Laguerre Models

Yuan Zhendong

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai, 200062)

Abstract Asymptotic black-box identification theory is established by Ljung L and Yuan Z D [4]. In this paper, the black-box identification method is adopted by using Laguerre models. The consistancy of transfer function estimates is proved under certain conditions.

Keywords black-box identification; Laguerre model; consistancy of transfer function estimate