研究通讯

广义 Kac-Moody 代数的导子

本文给出了广义 Kac-Moody 代数的广义抛物子代数的定义，确定了这类子代数导子代数的结构，并且给出了这类子代数完备的充要条件.

定义 1 设 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 为广义 GCM, $H=\sum_{i=1}^{n}C\alpha_j^V+\mathfrak{A}$ 为它的 Cartan 子代数，$\pi=\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ 为广义的 Kac-Moody 代数(以下简记为 GKM 代数) $\mathfrak{G}(A)$ 的单根系，$\pi_1\subseteq\pi$，则称

$$P_{\pi_1}=H\oplus\sum_{\alpha\in\Delta_1}\mathfrak{G}_\alpha$$

为 $\mathfrak{G}(A)$ 的广义抛物子代数. 其中

$$\Delta_1\supseteq\Delta_+,\ 且$$

$$\Delta_1\cap\Delta_-=\{\alpha=\sum_{\alpha_i\in\pi}n_i\alpha_i|n_i=0\ 当\ \alpha_i\notin\pi_1\}.$$

易知，当 $\pi_1=\pi$ 时 $P_{\pi_1}=\mathfrak{G}(A)$; 当 $\pi_1=\phi$ 时我们称 $P_{\pi_1}=H\oplus\mathfrak{G}_+$ 为 $\mathfrak{G}(A)$ 的广义 Borel 子代数.

定义 2 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 称为完备的，如果

(i) $C(\mathfrak{G})=0$;

(ii) $\mathrm{Der}(\mathfrak{G})=\mathrm{Im}(\mathfrak{G})$.

下面的讨论均在复数域上进行，GGCM 均为不可分的且是可对称化的.

定理 1 广义 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{G}(A)$ 的广义抛物子代数 P_{π_1} 完备当且仅当 $|A|\neq0$.

注 1 由定理 1 即知有限维半单 Lie 代数的抛物子代数完备.

注 2 Kac-Moody 代数作为广义 Kac-Moody 代数的子类，有相同的结论.

设 $\pi_1\subseteq\pi$, $H=\sum_{\alpha_i\in\pi}C\alpha_i^V\oplus\mathfrak{A}$, $H_1=\left(\sum_{\alpha_i\in\pi\setminus\pi_1}\cdot C\alpha_i^V\right)\oplus\mathfrak{A}$, 令 $f\in\mathrm{Hom}(H_1,\ C(\mathfrak{G}))$, 把 f 扩充成 P_{π_1} 上的线性变换 φ_f, 且使

$$\varphi_f\left(\left(\sum_{\alpha_i\in\pi_1}\alpha_i^V\right)\oplus\left(\sum_{\alpha\in\Delta_1}\mathfrak{G}_\alpha\right)\right)=(0).$$

则 φ_f 为 P_{π_1} 的导子，记

$\Gamma=\{\varphi_f|f\in\mathrm{Hom}_C(H_1,\ C(\mathfrak{G})\}$, 则有

定理 2 设 P_{π_1} 为 GKM 代数 $\mathfrak{G}(A)$ 的广义抛物子代数，且 $\mathrm{rank}\,\pi_1=r$, $\mathrm{rank}\,(A)=l$，则

$$\mathrm{Der}(P_{\pi_1})=\Gamma\oplus Inn(P_{\pi_1})\ 且$$

$$\dim H^1(P_{\pi_1},\ P_{\pi_1})=(2n-l-r)(n-l).$$

注 1 只要令 $H_1=\mathfrak{A}$, 或 $H_1=H$, 则由定理 2 分别得到 $\mathfrak{G}(A)$ 及 $\mathfrak{G}(A)$ 的广义 Borel 子代数导子代数的结构.

注 2 Kac-Moody 代数作为广义 Kac-Moody 代数的子类，同样有与定理 2 的相应的抛物子代数导子代数的结构，从而推广了文献[1] 中定理 2.1, 定理 2.2 的结构.

参 考 文 献

1 Farnsteiner R. Derivations and central extension of finitely generated gradeol Lie algebras. J Algebra, 1988, 118(2): 33～45

朱林生
(常熟高等专业学校数学系，常熟 215500)

孟道骥
(南开大学数学系，天津 300071)