

文章编号: 1000-4750(2013)10-0162-09

# 悬链线斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载

刘爱荣<sup>1</sup>, 汪荷玲<sup>2</sup>, 禹奇才<sup>1</sup>, 张俊平<sup>1</sup>

(1. 广州大学-淡江大学工程结构灾害与控制联合研究中心, 广州 510006; 2. 广州市市政工程设计研究院, 广州 510060)

**摘 要:** 基于能量分析方法, 推导了主拱肋和稳定拱肋拱轴线为悬链线的斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载计算公式, 并通过与有限元数值计算结果比较, 证明了该计算公式的正确性, 进一步验证了所提出的拱肋系侧倾失稳时横撑切向和径向力学模型的适用性, 并将拱轴线为悬链线和圆弧曲线的斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载进行了比对分析, 阐明了圆弧曲线代替悬链线斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载的适用条件。研究结果表明: 拱肋系的线型对斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载有一定的影响; 当稳定拱肋倾角较小时, 悬链线拱肋系的侧倾失稳临界荷载与圆弧曲线拱肋系的差异不超过 5%; 当矢跨比较小时, 圆弧曲线拱肋系代替悬链线拱肋系的侧倾失稳临界荷载产生的误差在 10% 以下, 但矢跨比较大时, 二者的差异较大, 不可等同。

**关键词:** 斜靠式拱肋系; 悬链线; 侧倾失稳; 临界荷载; 解析解

中图分类号: TU318 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.06.0460

## LATERAL BUCKLING CRITICAL LOAD OF LEANING-TYPE ARCH RIBS SYSTEM WITH CATENARY CURVE ARCH AXIS

LIU Ai-rong<sup>1</sup>, WANG He-ling<sup>2</sup>, YU Qi-cai<sup>1</sup>, ZHANG Jun-ping<sup>1</sup>

(1. Guangzhou University-Danjiang University Join Research Center for Engineering Structure Disaster Prevention and Control, Guangzhou 510006, China;

2. Guangzhou Municipal Engineering Design Research Institute, Guangzhou 510060, China)

**Abstract:** Based on energy analysis method, the calculation formula of lateral buckling critical load of the leaning-type arch ribs with the catenary arch axis is derived. Compared with the results obtained from FEM, the analytical solution formula presented is verified in this paper. The applicability of the lateral and radial mechanical models of transverse brace between the main arch rib and stable arch rib proposed are validated. Furthermore, the lateral buckling critical load under circular arch axis and catenary are compared, while the quantity relationship and the applicable condition that replacing the lateral buckling critical load of catenary arch with the circular arch are analyzed. It is shown that the line-type of arch axis has a certain extent impact on the lateral buckling critical load of the leaning-type arch ribs. When the incline angle of stable ribs is small, the difference of the lateral buckling critical load between the catenary arch rib system and circular arch rib system is less than 5%. The error induced by the lateral buckling critical load of circular arch rib system replacing that of the catenary arch rib system will be less than 10% when the rise-span ratios are small enough. With the increasing of rise-span ratios, the differences will increase and the replacement is not feasible.

**Key words:** leaning-type arch ribs; lateral buckling; critical load; catenary; analytical solution

收稿日期: 2012-06-28; 修回日期: 2013-01-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(11272095); 广东省科技计划项目(2012B040302005, 2011B010300026); 广州市科技攻关重大专项项目(2011Y2-00006); 广东省教育厅科技创新重点项目(2012CXZD0028)

通讯作者: 刘爱荣(1972—), 女, 山西吕梁人, 教授, 博士, 从事桥梁结构防灾减灾研究(E-mail: liu-a-r@163.com).

作者简介: 汪荷玲(1986—), 女, 湖北黄梅人, 硕士, 从事桥梁结构防灾减灾研究(E-mail: 490865409@qq.com);

禹奇才(1955—), 男, 湖南双峰人, 教授, 硕士, 从事桥梁结构防灾减灾研究(E-mail: zhydxs@ihw.com.cn);

张俊平(1968—), 男, 甘肃庆阳人, 教授, 博士, 从事桥梁结构防灾减灾研究(E-mail: 13808861313@139.com).

斜靠式拱桥是近年来发展起来的一种新型空间拱桥,由斜靠式拱肋系、吊杆和桥面系组成。拱肋系由两片垂直于桥面的承重拱肋(主拱肋)和设于承重拱肋两侧的斜拱肋(稳定拱肋)组合而成,主拱肋与稳定拱肋通过横撑连接成一个空间稳定体系。斜靠式拱桥的主拱肋横截面较小,但与相同跨径的无横撑系杆拱桥相比,其侧向稳定性能指标较好,与有横撑系杆拱桥相比,其侧向刚度较小,侧向稳定性便成为控制设计的主要因素<sup>[1-4]</sup>。所以研究斜靠式拱肋系的侧向稳定性,构建其侧倾失稳临界荷载的计算方法是很有必要的。特别是目前桥梁日益向大跨度和轻柔化发展,其侧向稳定性问题显得越发突出<sup>[5]</sup>。

目前对斜靠式拱桥侧倾失稳的研究手段大部分局限于有限元数值模拟法<sup>[6]</sup>,只有刘爱荣和申富林等基于能量法推导了拱轴线为圆弧曲线的斜靠式拱肋系和斜靠式拱桥的侧倾失稳临界荷载的解析解<sup>[7-8]</sup>。为便于解析解的推导,刘爱荣和申富林等假设主拱肋和稳定拱肋拱轴线均为圆弧线,而实际工程中,大部分斜靠式拱桥拱轴线呈悬链线或抛物线型。事实上,圆弧拱在矢跨比较大的情况下与抛物线或悬链线拱线型有较大的差异,拱轴线为圆弧曲线的斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载无法直接代替抛物线或悬链线拱肋系的侧倾失稳临界荷载,所以推导拱轴线为悬链线的斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载是很有必要的。

相对于圆弧曲线拱轴线,拱轴线为悬链线的斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载公式推导过程需考虑的因素更多、更为复杂,难度更大。本文基于能量原理,在笔者及前人前期研究工作的基础上<sup>[7-14]</sup>,推导出了拱轴线为悬链线的斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载的计算公式,验证了所提出的拱肋系发生侧倾失稳时横撑径向和切向力学模型的正确性<sup>[8]</sup>,将拱轴线为悬链线、圆弧曲线的斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载进行了对比分析,得到了圆弧拱轴线代替悬链线拱轴线的适用条件。

## 1 悬链线斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载的推导

### 1.1 基本假定与拱肋位移

在推导悬链线斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载过程中作了如下假设:①主拱肋与稳定拱肋拱轴线均为悬链线;②主拱肋、稳定拱肋拱脚均固

接;③拱肋与横撑刚度均为恒定值;④拱肋在失稳过程中轴向不发生变形。

斜靠式拱肋系的简化计算图式,如图1所示,总体坐标系下沿拱肋切向、径向和侧向的平动位移分别为 $w$ 、 $v$ 和 $u$ ,相应的转动位移分别为 $\theta$ 、 $\delta$ 和 $\gamma$ ;主拱肋铅垂、稳定拱肋与主拱肋间的夹角为 $\varphi_0$ 。计算跨径 $L_0 = 2L$ ,矢高为 $f$ ,矢跨比为 $f/L_0$ , $b_0$ 为拱顶主拱肋与稳定拱肋间距, $b_m$ 为拱脚间距, $b$ 为横撑的长度,拱轴系数为 $m$ ,拱轴线悬链线方程为:

$$y = \frac{f}{m-1}(\cosh k\xi - 1) \quad (1)$$

式中, $u_2 = C_2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\alpha_2} \right)$ ,  $\xi = x/L$ ,  $dx = Ld\xi$ 。

为方便推导,令常量 $C = \frac{f}{L} \frac{k}{m-1}$ ,则拱轴线的

曲率半径为:

$$R = \frac{L}{Ck \cosh k\xi} (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{3/2} \quad (2)$$

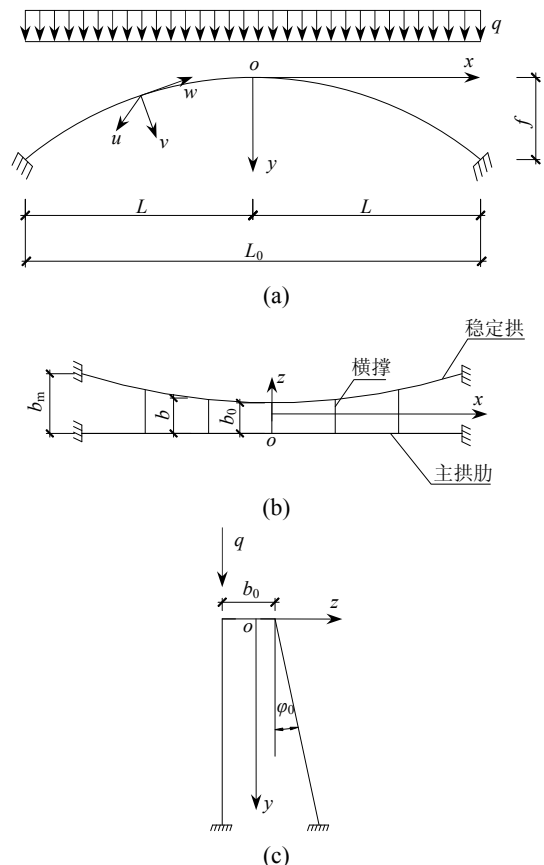


图1 斜靠式拱肋系简化计算图式

Fig.1 Calculation sketch of leaning-type arch ribs system

根据基本假定和计算图式,主拱肋、稳定拱肋在总体坐标系下的侧向位移 $u$ ,局部坐标系下的侧

向位移  $u_1$ 、 $u_2$  和径向位移  $v_1$ 、 $v_2$  的关系分别为:

$$u_1 = u, \quad u_2 = \frac{y'_{02}}{y'_{01} + y'_{02}} b\beta \sin \varphi_0 + u \cos \varphi_0 \quad (3)$$

$$v_1 = \frac{y'_{01}}{y'_{01} + y'_{02}} b\beta,$$

$$v_2 = -\frac{y'_{02}}{y'_{01} + y'_{02}} b\beta \cos \varphi_0 + u \sin \varphi_0 \quad (4)$$

式中,  $\beta$  为拱肋变形引起的横撑在拱肋径向平面内的整体转角;  $y'_{01}$ 、 $y'_{02}$  分别为拱肋系发生侧倾失稳时, 横撑竖向变形反弯点与主拱肋和稳定拱肋的垂直距离(见图 2 所示);  $\frac{y'_{01}}{y'_{01} + y'_{02}}$  为斜靠式拱肋系发生侧向失稳时横撑在径向变形时反弯点到近主拱肋端的距离占整个横撑长度的比值;  $\frac{y'_{02}}{y'_{01} + y'_{02}}$  为横撑在径向变形时反弯点到近稳定拱肋端的距离占整个横撑长度的比值。

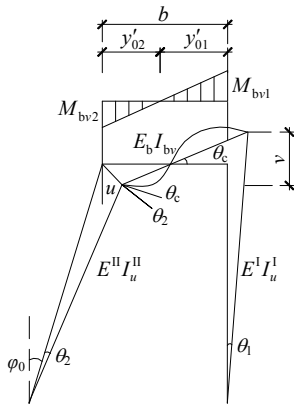


图 2 横撑径向弯曲变形

Fig.2 Radial bending deformation of transverse brace

由于斜靠式拱肋系结构和荷载沿桥跨方向对称, 所以:

$$v_{x1} = 0 \quad (5)$$

$$v_1 = v_{y1} \cos \alpha, \quad w_1 = v_{y1} \sin \alpha \quad (6)$$

式中:  $v_{x1}$  为主拱沿  $x$  方向的位移;  $v_{y1}$  为主拱沿  $y$  方向的位移;  $w_1$  为主拱沿切线方向的位移。

主拱肋沿径向方向的位移为:

$$v_1 = \frac{v_{y1}}{\sqrt{1 + C^2 \sinh^2 k\xi}} \quad (7)$$

主拱肋切向位移与径向位移的关系为:

$$w_1 = C v_1 \sinh k\xi = v_{y1} C \sinh k\xi (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} \quad (8)$$

由曲梁变形几何位移关系, 并引入拱肋不可压缩条件, 得:

$$\varepsilon_1 = -\frac{v_1}{R} + w'_1 + \frac{1}{2}(v_1'^2 + u_1'^2) = 0 \quad (9)$$

将  $v_{y1}$  对  $\xi$  求导, 可得:

$$v'_{y1\xi} = \frac{1}{2C \cdot L \cdot \sinh k\xi} \left[ \left( \frac{y'_{01}}{y'_{01} + y'_{02}} \right)^2 b^2 \beta_{\xi}^2 + u_{\xi}^2 \right] \quad (10)$$

### 1.2 位移函数与曲率

假设主拱肋和稳定拱肋拱脚均固结, 则主拱肋和稳定拱肋在整体坐标系下, 拱轴线的侧倾位移为:

$$u = a_0 \left( 1 - \frac{2}{\cosh k} \cosh k\xi + \frac{1}{\cosh^2 k} \cosh^2 k\xi \right) \quad (11)$$

主拱肋、稳定拱肋扭转角分别表示为:

$$\theta_1 = b_0 \left( 1 - \frac{2}{\cosh k} \cosh k\xi + \frac{1}{\cosh^2 k} \cosh^2 k\xi \right) \quad (12)$$

$$\theta_2 = c_0 \left( 1 - \frac{2}{\cosh k} \cosh k\xi + \frac{1}{\cosh^2 k} \cosh^2 k\xi \right) \quad (13)$$

拱肋变形引起的横撑在拱肋径向平面内的整体转角位移为:

$$\beta = d_0 \left( 1 - \frac{2}{\cosh k} \cosh k\xi + \frac{1}{\cosh^2 k} \cosh^2 k\xi \right) \quad (14)$$

式(11)~式(14)中,  $a_i$ 、 $b_i$ 、 $c_i$ 、 $d_i$  均为常数。

以上位移函数满足以下边界条件:

当  $\xi = \pm 1$  时,  $\theta_1 = \theta_2 = \beta = 0$ ,  $u = 0$ ;

$\theta'_1 = \theta'_2 = \beta' = 0$ ,  $u' = 0$ 。

为方便起见, 令

$$u = a_0 g, \quad \theta_1 = b_0 g, \quad \theta_2 = c_0 g, \quad \beta = d_0 g \quad (15)$$

$$u'_{\xi} = a_0 g'_{\xi}, \quad \theta'_{1\xi} = b_0 g'_{\xi}, \quad \theta'_{2\xi} = c_0 g'_{\xi}, \quad \beta'_{\xi} = d_0 g'_{\xi} \quad (16)$$

$$u''_{\xi} = a_0 g''_{\xi}, \quad \theta''_{1\xi} = b_0 g''_{\xi}, \quad \theta''_{2\xi} = c_0 g''_{\xi}, \quad \beta''_{\xi} = d_0 g''_{\xi} \quad (17)$$

其中,  $u'_{\xi}$ 、 $\theta'_{1\xi}$ 、 $\theta'_{2\xi}$ 、 $\beta'_{\xi}$  分别表示  $u$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\beta$  对  $\xi$  的一阶导数;  $u''_{\xi}$ 、 $\theta''_{1\xi}$ 、 $\theta''_{2\xi}$ 、 $\beta''_{\xi}$  分别表示  $u$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\beta$  对  $\xi$  的二阶导数;  $u'$ 、 $\theta'_1$ 、 $\theta'_2$ 、 $\beta'$  分别表示  $u$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\beta$  对弧长的一阶导数;  $u''$ 、 $\theta''_1$ 、 $\theta''_2$ 、 $\beta''$  分别表示  $u$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\beta$  对弧长的二阶导数;

$$g = \left( 1 - \frac{2}{m} \cosh k\xi + \frac{1}{m^2} \cosh^2 k\xi \right),$$

$$g' = \left( \frac{2k}{m} \sinh k\xi + \frac{2k}{m^2} \sinh k\xi \cosh k\xi \right),$$

$$g'' = \left[ \frac{2k^2}{m} \cosh k\xi + \frac{2k^2}{m^2} (\sinh^2 k\xi + \cosh^2 k\xi) \right].$$

令

$$T_4'' = (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1} \cdot \left( g_\xi'' - \frac{C^2 \cdot k \cdot \sinh k\xi \cdot \cosh k\xi}{1 + C^2 \sinh^2 k\xi} g_\xi' \right)$$

则  $u'' = \frac{a_0}{L_2} T_\varphi''$ ,  $\beta = \frac{d_0}{L_2} T_\varphi''$ 。

令

$$t_0 = kC \cosh k\xi (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-3/2},$$

则  $\frac{1}{R} = \frac{1}{L} t_0$ 。

主拱肋和稳定拱肋绕  $v$  轴的侧向挠曲率为:

$$K_u^I = \frac{\theta_1}{R} - u_1'' = \left( \frac{b_0 g}{L} t_0 - \frac{a_0}{L_2} T_\xi'' \right) \quad (18)$$

$$K_u^{II} = \frac{\theta_2}{R} - u_2'' = \frac{c_0}{L} g t_0 - \left( \frac{d_0}{L^2} \frac{b \sin \varphi_0}{1 + e_2} T_\xi'' + \frac{a_0 \cos \varphi_0}{L^2} T_\xi'' \right) \quad (19)$$

式中,  $K_u^I$  和  $K_u^{II}$  分别为主拱肋和稳定拱肋绕  $v$  轴的侧向挠曲率。

主拱肋和稳定拱肋绕  $w$  轴的扭转曲率为:

$$K_w^I = \theta_1' + \frac{u_1'}{R_1} = \frac{b_0}{L} g_\xi' (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} + \frac{a_0}{L^2} g_\xi' t_0 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} \quad (20)$$

$$K_w^{II} = \theta_2' + \frac{u_2'}{R_1} = \frac{c_0}{L} g_\xi' (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} + \frac{t_0}{L} \left[ \frac{b \beta_\xi'}{1 + e_2} \frac{\sin \varphi_0}{L} + \frac{1}{L} u_\xi' \cos \varphi_0 \right] (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} \quad (21)$$

式中,  $K_w^I$  和  $K_w^{II}$  分别为主拱肋和稳定拱肋绕  $w$  轴的扭转曲率。

### 1.3 总能量

斜靠式拱肋系侧倾失稳能量方程可表示为:

$$W = U_u^I + U_u^{II} + U_w^I + U_w^{II} + U_{cu}^I + U_{cu}^{II} + U_{bv} + U_{bh} + V \quad (22)$$

上式中,  $U_u^I$ 、 $U_u^{II}$ 、 $U_w^I$ 、 $U_w^{II}$ 、 $U_{cu}^I$ 、 $U_{cu}^{II}$  分别为主拱肋和稳定拱肋的侧向总体弯曲变形能、扭转变形能、局部弯曲变形能;  $U_{bv}$ 、 $U_{bh}$  分别为横撑的径向和切向弯曲变形能;  $V$  为拱肋的外力势能。

### 1.4 侧倾失稳能量方程

#### 1.4.1 主拱肋和稳定拱肋的侧向总体弯曲变形能

$$U_u^I + U_u^{II} = \frac{1}{2} E^I I_u^I \int_s (K_u^I)^2 ds + \frac{1}{2} E^{II} I_u^{II} \int_s (K_u^{II})^2 ds =$$

$$\frac{1}{2} E^I I_u^I \left( \frac{a_0^2}{L^3} A_{11} + \frac{b_0^2}{L} A_{12} + \frac{a_0 b_0}{L^2} A_{14} \right) + \frac{1}{2} E^{II} I_u^{II} \cdot \left( \frac{a_0^2}{L^3} A_{21} + \frac{c_0^2}{L} A_{22} + \frac{d_0}{L} A_{23} + \frac{a_0 c_0}{L^2} A_{24} + \frac{a_0 d_0}{L^2} A_{25} + \frac{c_0 d_0}{L} A_{26} \right) \quad (23)$$

其中:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_{-1}^1 T_\xi''^2 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{1/2} d\xi, \\ A_{12} &= \int_{-1}^1 g^2 t_0^2 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{1/2} d\xi, \\ A_{14} &= \int_{-1}^1 -2 g t_0 T_\xi'' (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{1/2} d\xi, \\ A_{21} &= \int_{-1}^1 \cos^2 \varphi_0 T_\xi''^2 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{1/2} d\xi, \\ A_{22} &= \int_{-1}^1 g^2 t_0^2 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{1/2} d\xi, \\ A_{23} &= \int_{-1}^1 \frac{b^2 \sin^2 \varphi_0}{L^2} \left( \frac{y'_{02}}{y'_{01} + y'_{02}} \right)^2 T_\xi''^2 \cdot (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{1/2} d\xi, \\ A_{24} &= \int_{-1}^1 -2 \cos \varphi_0 g t_0 T_\xi'' (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{1/2} d\xi, \\ A_{25} &= \int_{-1}^1 \frac{2b}{L} \frac{y'_{02}}{y'_{01} + y'_{02}} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 T_\xi''^2 \cdot (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{1/2} d\xi, \\ A_{26} &= \int_{-1}^1 \frac{2b \sin \varphi_0}{L} \frac{y'_{02}}{y'_{01} + y'_{02}} g t_0 T_\xi'' (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{1/2} d\xi. \end{aligned}$$

上式中,  $E^I I_u^I$  和  $E^{II} I_u^{II}$  分别为主拱肋和稳定拱肋的侧向抗弯刚度。

#### 1.4.2 主拱肋和稳定拱肋的扭转变形能

$$U_w^I + U_w^{II} = \frac{1}{2} G^I T^I \int_s (K_w^I)^2 ds + \frac{1}{2} G^{II} T^{II} \int_s (K_w^{II})^2 ds = \frac{1}{2} G^I T^I \left( \frac{a_0^2}{L^3} B_{11} + \frac{b_0^2}{L} B_{12} + \frac{a_0 b_0}{L^2} B_{14} \right) + \frac{1}{2} G^{II} T^{II} \cdot \left( \frac{a_0^2}{L^3} B_{21} + \frac{c_0^2}{L} B_{22} + \frac{d_0^2}{L} B_{23} + \frac{a_0 c_0}{L^2} B_{24} + \frac{a_0 d_0}{L^2} B_{25} + \frac{c_0 d_0}{L} B_{26} \right) \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \int_{-1}^1 t_0^2 g_\xi'^2 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} d\xi, \\ B_{12} &= \int_{-1}^1 g_\xi'^2 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} d\xi, \\ B_{14} &= \int_{-1}^1 2 g_\xi'^2 \cdot t_0 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{21} &= \int_{-1}^1 \cos^2 \varphi_0 t_0^2 g'^2 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} d\xi, \\
 B_{22} &= \int_{-1}^1 g'^2 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} d\xi, \\
 B_{23} &= \int_{-1}^1 \frac{b^2 \sin^2 \varphi_0}{L^2} \left( \frac{y'_{02}}{y'_{01} + y'_{02}} \right)^2 t_0^2 g_\xi'^2 \cdot \\
 &\quad (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} d\xi, \\
 B_{24} &= \int_{-1}^1 2 \cos \varphi_0 g_\xi'^2 t_0 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} d\xi, \\
 B_{25} &= \int_{-1}^1 \frac{2b}{L} \frac{y'_{02}}{y'_{01} + y'_{02}} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 t_0^2 g_\xi'^2 \cdot \\
 &\quad (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} d\xi, \\
 B_{26} &= \int_{-1}^1 \frac{2b \sin \varphi_0}{L} \frac{y'_{02}}{y'_{01} + y'_{02}} g_\xi'^2 t_0 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} d\xi.
 \end{aligned}$$

上式中,  $G^I T^I$ 、 $G^{II} T^{II}$  分别为主拱肋和稳定拱肋的抗扭刚度。

### 1.4.3 横撑切向弯曲变形能及拱肋局部变形能

当斜靠式拱肋系发生侧倾失稳时, 横撑在沿拱轴线切向的弯曲变形模态及对应的弯矩如图 3 所示, 与图 3 中变形相对应的受力模型如图 4 所示, 全拱肋范围内横撑的切向弯曲变形能为<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned}
 U_{bh} &= \frac{2E_b I_{bh}}{9db} \left[ \int_0^{y_{01}} \frac{2\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_3} (4\gamma_1^2 + 4\gamma_1\gamma_3 + \gamma_3^2) ds + \right. \\
 &\quad \left. \int_0^{y_{02}} \frac{\gamma_1 + 2\gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_3} (\gamma_1^2 + 4\gamma_1\gamma_3 + 4\gamma_3^2) ds \right] \quad (25)
 \end{aligned}$$

式中:  $y_{01}$ 、 $y_{02}$  分别为横撑切向变形反弯点与主拱肋和稳定拱肋的垂直距离, 横撑长度  $b = y_{01} + y_{02}$ ;  $M_{bh1}$  和  $M_{bh2}$  分别为近主拱肋和稳定拱肋横撑两端的切向弯矩;  $E_b I_{bh}$  为横撑切向抗弯刚度;  $\gamma_1$  和  $\gamma_3$  分别为横撑两端的切向转角。

横撑的切向弯曲变形能和拱肋的局部弯曲变形能可表示为<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned}
 U_{bH} + U_{cu}^I + U_{cu}^{II} &= \frac{2E_b I_{bh}}{9dh} \int_s \frac{2\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_3} (4\gamma_1^2 + 4\gamma_1\gamma_3 + \gamma_3^2) + \\
 &\quad \frac{3E_b I_{bh}}{dh} \int_s \gamma_1 \gamma_2 ds + \\
 &\quad \frac{2E_b I_{bh}}{9dh} \int_s \frac{\gamma_1 + 2\gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_3} (\gamma_1^2 + 4\gamma_1\gamma_3 + 4\gamma_3^2) ds + \\
 &\quad \frac{3E_b I_{bh}}{dh} \int_s \gamma_3 \gamma_4 ds = \\
 &\quad \frac{3E_b I_{bh}}{db} \int (N_1 \eta_1 + \eta_2) \eta_1 \gamma'^2 ds +
 \end{aligned}$$

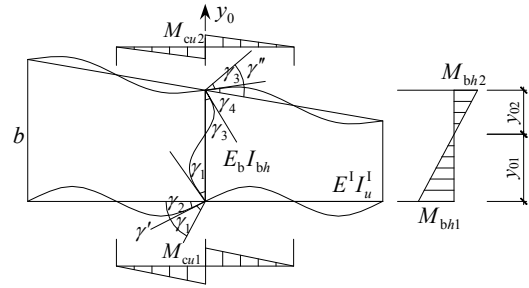


图 3 拱肋和横撑的弯曲变形

Fig.3 Bending deformation of arch ribs and transverse braces

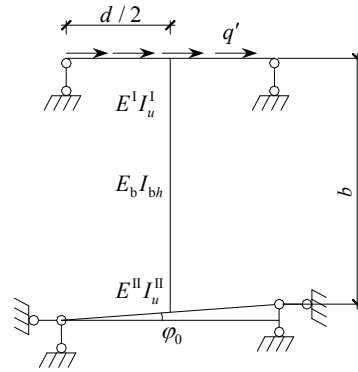


图 4 拱肋和横撑的切向受力模型

Fig.4 Mechanical model of arch ribs and transverse brace in tangential direction

$$\frac{3E_b I_{bh}}{db} \int (N_2 \eta_3 + \eta_4) \eta_3 \gamma'^2 ds = E_b I_{bh} \frac{a_0^2}{L^3} D_1 \quad (26)$$

式中:  $U_{cu}^I$ 、 $U_{cu}^{II}$  分别表示单个节间主拱肋和稳定拱肋局部弯曲变形能;  $\gamma_2$  和  $\gamma_4$  分别为主、稳定拱肋发生切向局部变形时, 绕  $v$  轴的切向转角;

$$D_1 = \frac{3n}{s_0} \left[ \left( \frac{b}{L} \right) [(N_1 \eta_1 + \eta_2) \eta_1 + (N_2 \eta_3 + \eta_4) \eta_3] \cdot \right.$$

$$\left. \int_{-1}^1 g_\xi'^2 (1 + C^2 \sinh^2 k\xi)^{-1/2} d\xi \right]$$

$b = b_0 + \frac{f}{m-1} (\cosh k\xi - 1) \cdot \tan \phi_0$ , 为简化计算, 取

$1/4$  跨径处横撑的长度  $h$  代替  $b$ , 则此时  $h = b_0 + \frac{f}{m-1} (\cosh 0.5k - 1) \cdot \tan \phi_0$ ; 设横撑根数为

$(n-1)$ , 且沿弧长等分, 即  $d = \frac{S}{n}$ , 拱肋弧长

$$S = L \int_{-1}^1 \sqrt{1 + C^2 \sinh^2 k\xi} d\xi = S_0 L,$$

$$N_1 = \frac{2}{27} (4 + 4a + a^2) \frac{(a+2)}{(a+1)},$$

$$N_2 = \frac{2}{27} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a} + 4 \right) \frac{(1/a+2)}{(1/a+1)},$$

$$\eta_1 = \frac{2hE^I I_u^I}{2hE^I I_u^I + dE_b I_{bh}}, \quad \eta_2 = \frac{dE_b I_{bh}}{dE_b I_{bh} + 2hE^I I_u^I},$$

$$\eta_3 = \frac{2hE''I_u''}{2hE''I_u'' + dE_b I_{bh}}, \quad \eta_4 = \frac{dE_b I_{bh}}{dE_b I_{bh} + 2hE''I_u''}。$$

1.4.4 横撑的径向弯曲变形能

当斜靠式拱肋系发生侧倾失稳时，横撑也随之发生沿拱肋径向的弯曲变形，横撑的变形模态及相应弯矩图见图 2，其空间受力模型如图 5 所示，所以单根横撑的径向弯曲变形能可表示为<sup>[8]</sup>：

$$\begin{aligned} \bar{U}_{bv'} &= \frac{1}{2E_b I_{bv}} \int_0^{y'_{01}} \left( \frac{M_{bv1}}{y'_{01}} y'_0 \right)^2 dy'_0 + \\ &\frac{1}{2E_b I_{bv}} \int_0^{y'_{02}} \left( \frac{M_{bv2}}{y'_{02}} y'_0 \right)^2 dy'_0 \end{aligned} \quad (27)$$

式中， $E_b I_{bv}$  为横撑径向抗弯刚度。

同样，由于主拱肋和稳定拱肋的抗弯刚度差异较大，所以  $y'_{01} \neq y'_{02}$ ，为求解  $y'_{01}$  与  $y'_{02}$ ，假设斜靠式拱肋发生侧倾时，运用材料力学中的卡式定理求解该图，可得：

$$e_2 = \frac{M_{bv1}}{M_{bv2}} = \frac{(E_b I_{bh} d + 2b(x) \cos \varphi_0 G'' T'' ) G' T'}{(E_b I_{bh} d + 2b(x) \cos \varphi_0 G' T') G'' T''} \quad (28)$$

结合图 5，通过三角形相似可得，

$$y'_{01} = \frac{e_2}{1+e_2} b, \quad y'_{02} = \frac{1}{1+e_2} b \quad (29)$$

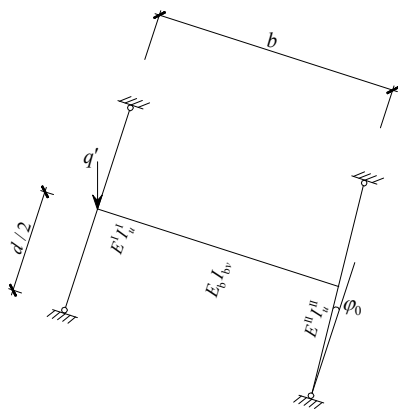


图 5 拱肋和横撑的径向受力模型

Fig.5 The mechanical model of arch ribs and transverse brace in radial direction

则由式(27)~式(29)可得全部横撑的变形能：

$$\begin{aligned} U_{bv} &= \frac{6E_b I_{bv}}{db} \frac{e_2}{1+e_2} \int_s (\beta - \theta_1)^2 ds + \\ &\frac{6E_b I_{bv}}{db} \frac{1}{1+e_2} \int_s (\beta - \theta_2)^2 ds + \\ &E_b I_{bv} \frac{(d_0 - b_0)^2}{L} D_2 + E_b I_{bv} \frac{(d_0 - c_0)^2}{L} D_3 \end{aligned} \quad (30)$$

式(30)中：

$$D_2 = \frac{6nL}{s_0} \frac{e_2}{b(1+e_2)} \int_{-1}^1 g^2 \sqrt{1+C^2 \sinh^2 k\xi} d\xi,$$

$$D_3 = \frac{6nL}{s_0} \frac{1}{b(1+e_2)} \int_{-1}^1 g^2 \sqrt{1+C^2 \sinh^2 k\xi} d\xi。$$

1.4.5 外力势能

由式(10)和式(16)得主拱肋的竖向位移为：

$$\begin{aligned} v_{y1} &= -\frac{2k}{3C \cdot L \cdot m^4} (3m^2 \cosh k\xi - 3m \cosh^2 k\xi + \\ &\cosh^3 k\xi - m^3) \cdot \left( a_0^2 + \frac{e_2^2}{(1+e_2)^2} b^2 d_0^2 \right) \end{aligned} \quad (31)$$

所以斜靠式拱肋系的外力势能为：

$$\begin{aligned} V &= q \int_{-1}^1 v_{y1} dy = -\frac{2k}{3C \cdot L \cdot m^4} q \cdot \\ &\int_{-1}^1 (3m^2 \cosh k\xi - 3m \cosh^2 k\xi + \cosh^2 k\xi - m^3) \cdot \\ &\left( a_0^2 + \frac{e_2^2}{(1+e_2)^2} b^2 d_0^2 \right) d\xi = -q(a_0^2 E_1 + d_0^2 L^2 E_2) \end{aligned} \quad (32)$$

其中：

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{2k}{3Cm^4} \int_{-1}^1 (3m^2 \cosh k\xi - 3m \cosh^2 k\xi + \\ &\cosh^3 k\xi - m^3) d\xi, \\ E_2 &= \frac{2k}{3Cm^4} \int_{-1}^1 (3m^2 \cosh k\xi - 3m \cosh^2 k\xi + \\ &\cosh^3 k\xi - m^3) \cdot \frac{e_2^2}{(1+e_2)^2} \left( \frac{b}{L} \right)^2 d\xi。 \end{aligned}$$

1.5 侧倾失稳临界荷载

由能量驻值原理，使总势能对位移函数系数  $a_0$ 、 $b_0$ 、 $c_0$ 、 $d_0$  的一阶偏导数为零，即  $\partial(W) = 0$ ，可得到关于位移函数系数的齐次方程组，齐次方程组有非零解的充要条件是其系数行列式为零，则得：

$$H_1 \lambda_{cr}^2 + H_2 \lambda_{cr} + H_3 = 0 \quad (33)$$

解方程式(33)得侧倾失稳临界荷载系数：

$$\lambda_{cr} = \frac{-H_2 \pm \sqrt{H_2^2 - 4H_1 H_3}}{2H_1} \quad (34)$$

式中：

$$\begin{aligned} H_1 &= S_2 S_3 E_1 E_2, \\ H_2 &= -4S_1 S_2 S_3 E_2 - 4S_2 S_3 S_4 E_1 + S_3 S_8^2 E_1 + S_3 S_5^2 E_2 + \\ &S_2 S_6^2 E_2 + S_2 S_9^2 E_1, \\ H_3 &= 16S_1 S_2 S_3 S_4 - 4S_1 S_3 S_8^2 - 4S_1 S_2 S_9^2 - 4S_3 S_4 S_5^2 - \\ &2S_5 S_6 S_8 S_9 + 4S_3 S_5 S_7 S_8 + S_5^2 S_9^2 + 4S_2 S_6 S_7 S_9 + \end{aligned}$$

$$S_6^2 S_8^2 - 4S_2 S_4 S_6^2 - 4S_2 S_3 S_7^2,$$

$$S_1 = A_{11} + k_1 A_{21} + k_2 B_{11} + k_3 B_{21} + 2k_4 D_1,$$

$$S_2 = A_{12} + k_2 B_{12} + 2k_5 D_2,$$

$$S_3 = k_1 A_{22} + k_3 B_{22} + 2k_5 D_3,$$

$$S_4 = k_1 A_{23} + k_3 B_{23} + 2k_5 D_2 + 2k_5 D_3,$$

$$S_5 = A_{14} + k_2 B_{14}, \quad S_6 = k_1 A_{24} + k_3 B_{24},$$

$$S_7 = k_1 A_{25} + k_3 B_{25}, \quad S_8 = -4k_5 D_2,$$

$$S_9 = k_1 A_{26} + k_3 B_{26} - 4k_5 D_3,$$

$$k_1 = \frac{E^{II} I_u^{II}}{E^I I_u^I}, \quad k_2 = \frac{G^I T^I}{E^I I_u^I}, \quad k_3 = \frac{G^{II} T^{II}}{E^I I_u^I}, \quad k_4 = \frac{E_b I_{bh}}{E^I I_u^I},$$

$$k_5 = \frac{E_b I_{bv}}{E^I I_u^I}.$$

则斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载为:

$$q_{cr} = \lambda_{cr} \frac{E^I I_u^I}{(2L)^3} \quad (35)$$

## 2 算例分析

以某跨径为 75m 的悬链线斜靠式拱肋系为例, 采用 Midas/Civil 软件建立了有限元数值分析模型(如图 6), 计算了斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载。该有限元模型共有 63 个单元, 60 个节点, 拱肋、横撑均采用 6 自由度空间梁单元。斜靠式拱肋

系的基本设计参数见表 1。该模型主拱肋、稳定拱肋拱脚间距  $b_m = 7.5 \text{ m}$ 。表 2 给出了稳定拱肋倾角分别  $0^\circ$ 、 $3^\circ$ 、 $5^\circ$ 、 $7^\circ$ 、 $9^\circ$ 、 $11^\circ$ 、 $13^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $17^\circ$  和  $19^\circ$  时, 本文所推导的斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载的解析解与有限元计算结果比较, 可以看出解析解与有限元数值解非常吻合, 最大误差为 4.61%, 说明所推导的悬链线斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载计算公式是正确的。

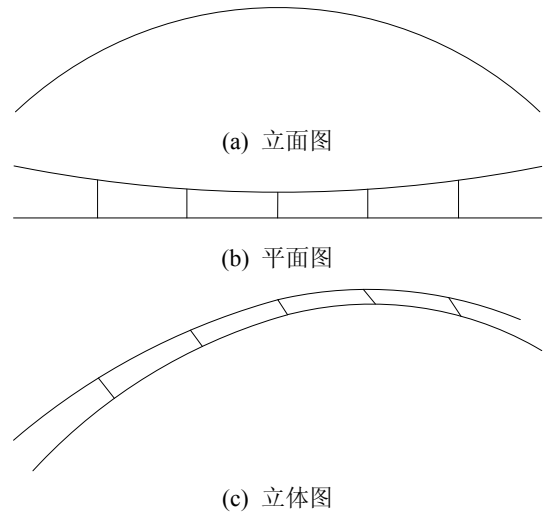


图 6 有限元计算模型  
Fig.6 The finite element model

表 1 有限元计算模型参数

Table 1 Finite Element Model Inputs

拱肋跨径/m	拱肋矢跨比	主拱和稳定拱拱脚间距/m	横撑根数	拱轴系数	泊松比	主拱肋刚度/(MN·m <sup>2</sup> )		稳定拱肋刚度/(MN·m <sup>2</sup> )		横撑抗弯刚度/(MN·m <sup>2</sup> )	
						侧向抗弯/(×10 <sup>4</sup> )	抗扭/(×10 <sup>4</sup> )	侧向抗弯/(×10 <sup>3</sup> )	抗扭/(×10 <sup>3</sup> )	径向/m <sup>4</sup>	切向/(×10 <sup>2</sup> )
75	1/5	7.5	6	1.167	0.2	1.414	1.179	1.111	0.926	36.84	1.058

表 2 悬链线斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载解析解与有限元计算结果比较

Table 2 Comparison between analytical solution and finite element results of lateral buckling critical load for leaning-type arch rib system with catenary curve arch axis

稳定拱肋倾角	0°	3°	5°	7°	9°	11°	13°	15°	17°	19°
解析解/(MN/m)	1.586	1.656	1.683	1.693	1.718	1.744	1.773	1.827	1.848	1.939
有限元解/(MN/m)	1.573	1.607	1.638	1.678	1.729	1.764	1.823	1.883	1.933	2.005
误差/(%)	0.84	2.97	2.65	0.88	0.65	1.14	2.80	3.05	4.61	3.29

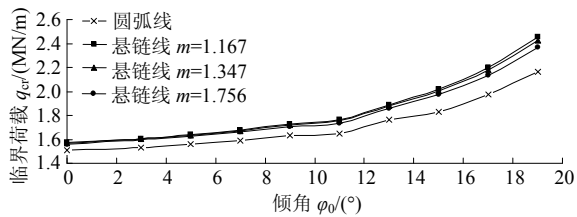
## 3 不同拱轴线下侧倾失稳临界荷载比较分析

### 3.1 不同倾角下的侧倾失稳临界荷载比较分析

图 7 为稳定拱肋倾角分别为  $0^\circ$ 、 $3^\circ$ 、 $5^\circ$ 、 $7^\circ$ 、 $9^\circ$ 、 $11^\circ$ 、 $13^\circ$ 、 $17^\circ$ 、 $19^\circ$  时, 拱轴线分别为圆弧线、悬链线下, 斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$ , 其中圆弧曲线斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载是运用刘爱荣和申富林<sup>[7]</sup>推导的公式计算得到的, 下同。

从图 7 可知, 斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$  随稳定拱肋倾角的增加而增大, 且两种拱轴线型下侧倾失稳临界荷载变化趋势基本相同。当稳定拱肋倾角  $\varphi_0 = 0^\circ$  时, 悬链线拱肋系的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$  比圆弧线拱肋系侧倾失稳临界荷载大 4.4%, 当稳定拱肋倾角  $\varphi_0 = 19^\circ$  时, 悬链线拱肋系的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$  比圆弧线拱肋系侧倾失稳临界荷载大 13.6%, 也就是说当稳定拱肋倾角较小时, 用拱轴线为圆弧线时的侧倾失稳临界荷载代替悬链线时的侧倾失稳临界荷载产生的误差较小, 当

稳定拱肋倾角较大时,不能简单地把圆弧线拱肋系的侧倾失稳临界荷载与悬链线拱肋系的等同起来。且当倾角越大,这种差异越明显。



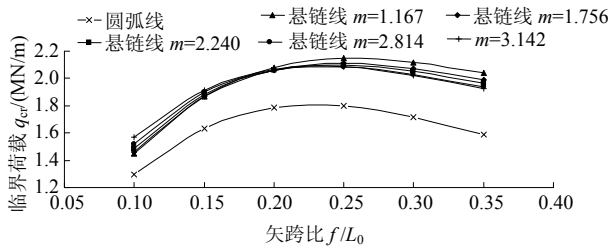
注:  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$ 、 $k_4$ 、 $k_5$  不变,  $n=6$ ,  $f/L_0=1/5$

图7 不同倾角下侧倾失稳临界荷载

Fig.7 Lateral buckling critical load under different inclined angle of stable arch rib

### 3.2 不同矢跨比下的侧倾失稳临界荷载比较分析

图8为矢跨比  $f/L_0$  分别为 0.1、0.15、0.2、0.25、0.3、0.35 时,拱轴线分别为圆弧线、悬链线时,斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$ 。



注:  $\phi_0=7^\circ$ ,  $n=6$ ,  $b_0=2\text{m}$ ,  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$ 、 $k_4$ 、 $k_5$  不变

图8 不同拱轴系数和不同矢跨比下侧倾失稳临界荷载

Fig.8 Lateral buckling critical load under different arch axis coefficient and different rise-span ratios

从图8看,圆弧线拱肋系与悬链线拱肋系的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$  变化趋势基本一致:当矢跨比较小时,侧倾失稳临界荷载随矢跨比的增加而增大,一旦临界荷载达到最大值后,侧倾失稳临界荷载又随着矢跨比的增加而减小。当矢跨比  $f/L_0=0.1$  时,圆弧线拱肋系的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$  比悬链线拱肋系的约小 9%;当矢跨比  $f/L_0=0.35$  时,圆弧线拱肋系比悬链线拱肋系的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$  小 28%,也就是说当矢跨比较小时,圆弧线拱肋系的侧倾失稳临界荷载与悬链线拱肋系的差值较小,此时用拱轴线为圆弧线时的侧倾失稳临界荷载代替拱轴线为悬链线拱肋时的侧倾失稳临界荷载产生的误差相对较小;当矢跨比较大时,圆弧线拱肋系的侧倾失稳临界荷载与悬链线拱肋系的侧倾失稳临界荷载相差较大,不能简单地把拱轴线为圆弧线时的侧倾失稳临界荷载与拱轴线为悬链线时的等同起来。

## 4 结论

(1) 推导了拱轴线为悬链线的斜靠式拱肋系的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$  的解析解计算公式,并通过有限元数值解验证了所推导计算公式的正确性以及所提出的横撑切向和径向力学模型的精确性。

(2)  $q_{cr}$  随稳定拱肋倾角的增大而增加,当稳定拱肋倾角  $\phi_0$  由  $0^\circ$  增至  $19^\circ$  时,拱轴线为悬链线时的  $q_{cr}$  比圆弧线时的相应大 4.4%~13.6%,即悬链线拱肋系的  $q_{cr}$  比圆弧线拱肋系的大。

(3) 当  $f/L_0=0.1$  时,圆弧线拱肋系的  $q_{cr}$  比悬链线拱肋系的约小 9%;当  $f/L_0=0.35$  时,圆弧线拱肋系比悬链线拱肋系的  $q_{cr}$  小 28%,即当矢跨比较小时,可用圆弧线拱肋系的  $q_{cr}$  似代替悬链线拱肋系的  $q_{cr}$  与悬链线拱肋系的等同起来。

### 参考文献:

- [1] 刘爱荣,禹奇才,宋瑞,张俊平.地震作用下斜靠式拱桥的动力稳定性[J].深圳大学学报,2010,27(3):286—290.  
Liu Airong, Yu Qicai, Song Rui, Zhang Junping. Dynamic stability of leaning-type arch bridge under earthquake [J]. Journal of Shenzhen Science and Engineering, 2010, 27(3): 286—290. (in Chinese)
- [2] Richard M, Andreas A. Field testing and simulation of dynamic properties of a tied arch railway bridge [J]. Engineering Structures, 2006, 28: 143—152.
- [3] Laurent, N. Vincent de Ville de Goyet, René Maquoi. Optimum bracing of the arches of tied-arch bridges [J]. Journal of Constructional Steel Research, 1991, 18: 239—249.
- [4] Nazmy A S. Stability and load-carrying capacity of three-dimensional long-span steel arch bridges [J]. Computers and Structures, 1997, 65(6): 857—868.
- [5] 李国豪.桥梁结构稳定与振动[M].北京:中国铁道出版社,1996.  
Li Guohao. Stability and vibrations of bridge structures [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1996. (in Chinese)
- [6] 陈淮,胡锋,申哲会,杨磊.斜靠式拱桥稳定性分析[J].福州大学学报,2005,33:182—186.  
Chen Huai, Hu Feng, Shen Zhehui, Yang Lei. Stability analysis of leaning-type arch bridge [J]. Journal of Fuzhou University, 2005, 33: 182—186. (in Chinese)
- [7] 刘爱荣,申富林,邝钜滔,张俊平,禹奇才.斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载计算方法[J].工程力学,2011,28(12):166—172.  
Liu Airong, Shen Fulin, Kuang Jutao, Zhang Junping, Yu Qicai. Calculation method for lateral buckling critical



- load of leaning-type arch ribs system [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(12): 166—172. (in Chinese)
- [8] 刘爱荣, 申富林, 张俊平, 禹奇才, 汪荷玲. 斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载计算方法[J]. *土木工程学报*, 2012, 45(4): 107—116.  
Liu Airong, Shen Fulin, Zhang Junping, Yu Qicai, Wang Heling. Analytical solution of lateral buckling critical load for leaning-type arch bridges [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2012, 45(4): 107—116. (in Chinese)
- [9] 项海帆. 拱结构的稳定与振动[M]. 北京: 人民交通出版社, 1991: 75—123.  
Xiang Haifan. The stability and vibration of arch structure [M]. Beijing: China Communications Press, 1991: 75—123. (in Chinese)
- [10] 钱莲萍, 项海帆. 空间拱桥结构侧倾稳定性的实用计算[J]. *同济大学学报*, 1989, 17(2): 161—172.  
Qian Lianping, Xiang Haifan. A practical method for lateral buckling analysis of arch bridges [J]. *Journal of Tongji University*, 1989, 17(2): 161—172. (in Chinese)
- [11] 金伟良, 赵国藩. X型双肋拱系的侧倾屈曲[J]. *土木工程学报*, 1989, 22(2): 44—45.  
Jin Weiliang, Zhao Guofan. Lateral buckling of X-type twin ribbed arch braced with transverse beams [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1989, 22(2): 44—54. (in Chinese)
- [12] 杨永清. 抛物线双肋拱在非保向力作用下的横向稳定性[J]. *西南交通大学*, 2003, 38(3): 310—313.  
Yang Yongqing. Lateral stability of parabolic double-rib arch under non-directional load [J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2003, 38(3): 309—313. (in Chinese)
- [13] 陈彦江. 大跨度钢管混凝土拱桥的横向稳定性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2001.  
Chen Yanjiang. Lateral stability study of load span concrete filled steel tubular arches bridge [D]. Haerbin: Haerbin Institute of Technology, 2001. (in Chinese)
- [14] 刘钊, 吕志涛. 有横撑系杆拱桥的侧向稳定承载力[J]. *工程力学*, 2004, 21(3): 21—24, 54.  
Liu Zhao, Lü Zhitao. Lateral buckling load of tied-arch bridges with transverse braces [J]. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(3): 21—24, 54. (in Chinese)

(上接第 161 页)

- [14] Gazetas G, Garini E, Anastasopoulos, Georgarakos T. Effect of near-fault ground shaking on sliding systems [J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2009, 135(12): 1906—1921.
- [15] 克拉夫 R, 彭津 J. 结构动力学[M]. 王光远, 等, 译. 北京: 高等教育出版社, 2007: 34—36.  
Clough R, Penzien J. Dynamics of structures [M]. Translated by Wang Guangyuan, et al. Beijing: Higher Education Press, 2007: 34—36. (in Chinese)
- [16] Kramer S L. Geotechnical earthquake engineering [M]. Prentice Hall, New Jersey, 1996: 130—147.
- [17] Dicleli M, Bruneau M. An energy approach to sliding of single-span simply supported slab-on-girder steel highway bridges with damaged bearings [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1995, 24(3): 395—409.
- [18] Dicleli M, Buddar S. Effect of isolator and ground motion characteristics on the performance of seismic-isolated bridges [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2006, 35: 233—250.