第 36卷 第 5期
2008年 10月

福州大学学报(自然科学版)
Journal of Fuzhou University(Natural Science)

Vol. 36 No. 5
Oct. 2008

文章编号: 1000-2243(2008)05-0634-05

关于矩阵半环的导子

庄金洪, 谭宜家

(福州大学数学与计算机科学学院, 福建 福州 350108)

摘要: 探讨交换半环上矩阵半环的导子, 证明了交换半环 R 上矩阵半环的导子均可表为一个内导子和 R 的一个诱导导子之和.

关键词: 交换半环; 矩阵半环; 导子; 内导子

中图分类号: O152.3　　　　文献标识码: A

On derivations of matrix semirings

ZHUANG Jin-hong, TAN Yi-jia

(College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350108, China)

Abstract: The derivations in the matrix semiring $M_n(R)$ over a commutative semiring R is studied and it is proved that every derivation of the semiring $M_n(R)$ is the sum of an inner derivation of $M_n(R)$ and another derivation which is induced from a derivation of R.

Keywords: commutative semiring; matrix semiring; derivation; inner derivation

1 引言与预备知识

同构和导子一直是环、结合代数与非结合代数理论中引人注目的研究课题[1-5]. 文[2]证明了环 R 上的 n 阶全矩阵环和 n 阶三角矩阵环上的每个导子均可表为一个内导子和 R 的一个诱导导子之和. 本文试图将环上的导子拓广到一般半环中去, 提出一般半环上导子的概念, 并探讨交换半环上矩阵半环的导子, 得到了类似于文[2]的结果.

定义 1[6]　设 R 是一非空集合, "+"与"•"是定义在 R 中的 2个代数运算. 如果

¹ $(R, +, 0)$ 是一个交换幺半群, 其中 0为 R 的加法恒等元;

④ $(R, \cdot, 1)$ 是一个幺半群, 其中 1为 R 的乘法恒等元;

㈣ 对任意的 $a, b, c \in R$, 均有 $a(b+c) = ab + ac$, $(a+b)c = ac + bc$;

¼ $\forall a \in R$, $0a = a0 = 0$;

½ $0 \neq 1$.

则称 R 为一个半环, 记为 $(R, +, \cdot, 0, 1)$ 或简记为 R. 其中, 加法恒等元 0称为半环 R 的零元, 而乘法恒等元 1称为 R 的单位元.

半环 R 称为交换半环, 如果 $\forall a, b \in R$ 均有 $ab = ba$. 设 $r \in R$, r 称为半环 R 的一个可反元, 如果存在 $s \in R$ 使得 $r + s = 0$, 此时 s 称为 r 的一个反元. 不难验证可反元 r 的反元是唯一的, 记为 $-r$. 显然, 一个半环是环当且仅当它的所有元均为可反元. 另外, $\forall a, r, s \in R$, 若 r, s 是 R 的可反元, 则可验证 $r+s$, ra, ar 均为 R 的可反元, 因此半环 R 中的所有可反元组成之集构成 R 的一个理想. 设 $a, b \in R$, b 是 R 的可反元, 则定义 $a - b = a + (-b)$.

定义 2　设 R 是一个半环, d 是 R 到 R 的一个映射, 如果对于任意 $x, y \in R$, 均有 $d(x+y) = d(x) + d(y)$, $d(xy) = d(x)y + xd(y)$, 则称 d 为 R 上的一个导子.

收稿日期: 2007-12-26

作者简介: 庄金洪(1982-), 男, 硕士研究生; 通讯作者: 谭宜家, 教授.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2008J0194); 福建省教育厅科研资助项目(JB07019, JB07020, JB06022)

引理 1　设 d_1, d_2是半环R上的 2个导子. 定义R上的映射d_1+d_2: 若 $\forall x\in R$, $(d_1+d_2)(x)=d_1(x)+d_2(x)$, 则 d_1+d_2也是R上的一个导子.

证明从略.

引理 2　设 $a\in R$是一个可反元, 在R上定义映射 d_a如下: 若 $\forall x\in R$, $d_a(x)=ax-xa$, 则d_a是R上的一个导子. 并且对于R中的任意 2个可反元 a, b, 均有 $d_{a+b}=d_a+d_b$.

证明　由于a是R中的可反元, 则 $\forall s, t\in R$, 显然有 $sa+s(-a)=0$, $sat+s(-a)t=0$, 所以 $s(-a)$与 $s(-a)t$分别是sa与 sat的反元, 即 $s(-a)=-sa$, $s(-a)t=-sat$. 于是 $\forall x, y\in R$, $d_a(x+y)=a(x+y)-(x+y)a=a(x+y)+(x+y)(-a)=(ax+ay)+(x(-a)+y(-a))=(ax+x(-a))+(ay+y(-a))=(ax-xa)+(ay-ya)=d_a(x)+d_a(y)$, 同时 $d_a(xy)=axy-xya=axy+xy(-a)=axy+(x(-a)y+xay)+xy(-a)=(axy+x(-a)y)+(xay+xy(-a))=(ax-xa)y+x(ay-ya)=d_a(x)y+xd_a(y)$. 所以有 $d_a(x+y)=d_a(x)+d_a(y)$, $d_a(xy)=d_a(x)y+xd_a(y)$. 因此, d_a是R上的一个导子.

再证 $d_{a+b}=d_a+d_b$. 因为$(a+b)+((-a)+(-b))=(a+(-a))+(b+(-b))=0+0=0$, 所以$(-a)+(-b)$是 $a+b$反元, 即$(-a)+(-b)=-(a+b)$. 于是 $\forall x\in R$, $d_{a+b}(x)=(a+b)x-x(a+b)=(a+b)x+x(-(a+b))=(a+b)x+x((-a)+(-b))=(ax+bx)+(x(-a)+x(-b))=(ax+x(-a))+(bx+x(-b))=(ax-xa)+(bx-xb)=d_a(x)+d_b(x)$, 即 $d_{a+b}=d_a+d_b$. 故此, 引理 2中定义的 d_a称为R中由可反元 a诱导的内导子.

定义 3　设R是一个交换半环, $M_n(R)$是R上所有 n阶矩阵组成之集. 对于 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}\in M_n(R)$, $a\in R$, 定义 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{n\times n}$, $AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{n\times n}$, $aA=(aa_{ij})_{n\times n}$.

不难验证, $M_n(R)$对于矩阵的加法与乘法构成一个半环, 称为交换半环R上的矩阵半环, 其零元是 n阶零矩阵O, 单位元是 n阶单位矩阵 I_n. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(R)$, A称为可反矩阵, 如果A中的每一个元素 a_{ij}均为R中的可反元. 此时$(-a_{ij})_{n\times n}$称为A的反矩阵, 记为 $-A$.

同样可证, $M_n(R)$中的所有可反矩阵组成之集构成半环$M_n(R)$的一个理想. 设A, $B\in M_n(R)$, 如果B是$M_n(R)$中的可反矩阵, 则定义$A-B=A+(-B)$.

引理 3　设 δ是交换半环R上的一个导子. 定义映射 $\bar{\delta}: M_n(R)\to M_n(R)$, 且满足 $\forall A=(a_{ij})\in M_n(R)$, $\bar{\delta}(A)=(\delta(a_{ij}))_{n\times n}$, 则 $\bar{\delta}$是$M_n(R)$上的一个导子.

证明　$\forall A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}\in M_n(R)$, $\bar{\delta}(A+B)=\bar{\delta}((a_{ij}+b_{ij})_{n\times n})=(\delta(a_{ij}+b_{ij}))_{n\times n}=(\delta(a_{ij})+\delta(b_{ij}))_{n\times n}=(\delta(a_{ij}))_{n\times n}+(\delta(b_{ij}))_{n\times n}=\bar{\delta}(A)+\bar{\delta}(B)$, 同时 $\bar{\delta}(AB)=\bar{\delta}\left((\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj})_{n\times n}\right)=\left(\delta(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj})\right)_{n\times n}=\left(\sum_{k=1}^{n}\delta(a_{ik}b_{kj})\right)_{n\times n}=\left(\sum_{k=1}^{n}(\delta(a_{ik})b_{kj}+a_{ik}\delta(b_{kj}))\right)_{n\times n}=\left(\sum_{k=1}^{n}\delta(a_{ik})b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta(b_{kj})\right)_{n\times n}=\left(\sum_{k=1}^{n}\delta(a_{ik})b_{kj}\right)_{n\times n}+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta(b_{kj})\right)_{n\times n}=\bar{\delta}(A)B+A\bar{\delta}(B)$. 所以, 有 $\bar{\delta}(A+B)=\bar{\delta}(A)+\bar{\delta}(B)$, $\bar{\delta}(AB)=\bar{\delta}(A)B+A\bar{\delta}(B)$. 因此 $\bar{\delta}$是$M_n(R)$上的一个导子.

2　主要结果

定理 1　设R是一个交换半环且满足 $\forall a\in R$, 由 $a+a=a$可推出 $a=0$, d是$M_n(R)$上的一个导子, 那么存在R上的一个导子 δ和$M_n(R)$中的一个可反矩阵A, 使得 $d=\bar{\delta}+d_A$.

证明　为方便起见, 用 e_{ij}表示(i, j)位置的元素为 1, 其余元素均为 0的 n阶矩阵. 分 2种情形讨论.

情形 1: $d(e_{11})=0$. 此时, 对于任意 $a\in R$, 均有 $d(ae_{11})=d(e_{11}ae_{11}e_{11})=d(e_{11}ae_{11})e_{11}+e_{11}ae_{11}d(e_{11})=(d(e_{11})ae_{11}+e_{11}d(ae_{11}))e_{11}+e_{11}ae_{11}d(e_{11})=d(e_{11})ae_{11}e_{11}+e_{11}d(ae_{11})e_{11}+e_{11}ae_{11}d(e_{11})=e_{11}d(ae_{11})e_{11}=\bar{a}e_{11}$, 其中 $\bar{a}\in R$.

现作映射 $\delta: R\to R$满足 $\forall a\in R$, $\delta(a)=\bar{a}$. 则 $\forall a, b\in R$, $d((a+b)e_{11})=d(ae_{11}+be_{11})=d(ae_{11})$

$+ d(be_{11}) = \bar{a}e_{11} + \bar{b}e_{11} = (\bar{a}+\bar{b})e_{11}$，同时 $d(abe_{11}) = d(ae_{11}be_{11}) = d(ae_{11})be_{11} + ae_{11}d(be_{11}) = \bar{a}e_{11}be_{11} + ae_{11}\bar{b}e_{11} = (\bar{a}b + a\bar{b})e_{11}$，所以有 $\delta(a+b) = \bar{a}+\bar{b} = \delta(a)+\delta(b)$，$\delta(ab) = \bar{a}b + a\bar{b} = \delta(a)b + a\delta(b)$. 因此，$\delta$为 R 上的导子.

由引理 3，映射 $\bar{\delta}: M_n(R) \to M_n(R)$ 是 $M_n(R)$ 上的一个导子.

对于 $i \neq 1$，有 $d(e_{i1}) = d(e_{i1}e_{11}) = d(e_{i1})e_{11}$，因此 $d(e_{i1})$ 除了第一列元素之外其余元素均为零，又 $d(O) = d(e_{11}e_{i1}) = e_{11}d(e_{i1})$，同时由 $d(O) = d(O+O) = d(O)+d(O)$ 及 R 的条件知，$d(O) = O$，从而 $d(e_{i1})$ 的 $(1, 1)$ 位置的元素也为零. 所以 $d(e_{i1})$ 具有形式 $d(e_{i1}) = \sum_{j=2}^{n} r_{j1}^{(i)} e_{j1}$，其中 $r_{j1}^{(i)} \in R$，$2 \leqslant j \leqslant n$.

类似地，对于 $i \neq 1$，有 $d(e_{1i}) = d(e_{11}e_{1i}) = e_{11}d(e_{1i})$，因此，$d(e_{1i})$ 除了第一行元素之外其余元素均为零，又 $O = d(O) = d(e_{1i}e_{11}) = d(e_{1i})e_{11}$，所以 $d(e_{1i})$ 的 $(1, 1)$ 位置的元素为零. 因此 $d(e_{1i})$ 具有形式 $d(e_{1i}) = \sum_{j=2}^{n} c_{1j}^{(i)} e_{1j}$，其中 $c_{1j}^{(i)} \in R$，$2 \leqslant j \leqslant n$.

这样，对于任意 k，$i \neq 1$，均有 $O = d(O) = d(e_{1k}e_{i1}) = d(e_{1k})e_{i1} + e_{1k}d(e_{i1}) = \left(\sum_{j=2}^{n} c_{1j}^{(k)} e_{1j}\right) e_{i1} + e_{1k}\left(\sum_{j=2}^{n} r_{j1}^{(k)} e_{j1}\right) = \left(c_{1i}^{(k)} + r_{k1}^{(i)}\right) e_{11}$. 所以 $c_{1i}^{(k)} + r_{k1}^{(i)} = 0$，$i$，$k = 2, 3, \dots, n$，因此 $c_{1i}^{(k)}$ 与 $r_{k1}^{(i)}$ 均为可反元并且

$$c_{1i}^{(k)} = - r_{k1}^{(i)} \qquad (2 \leqslant i, k \leqslant n) \tag{1}$$

现令:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{21}^{(2)} & r_{21}^{(3)} & \cdots & r_{21}^{(n)} \\ 0 & r_{31}^{(2)} & r_{31}^{(3)} & \cdots & r_{31}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & r_{n1}^{(2)} & r_{n1}^{(3)} & \cdots & r_{n1}^{(n)} \end{pmatrix}$$

则 A_1 是可反矩阵，且

$$A_1 = \sum_{j=2}^{n} d(e_{j1})e_{1j} \tag{2}$$

下面证明 $d = \bar{\delta} + d_{A_1}$. 首先，有 $\forall a \in R$，$d(ae_{11}) = \bar{a}e_{11}$，而 $\bar{\delta}(ae_{11}) + d_{A_1}(ae_{11}) = \delta(a)e_{11} + (A_1(ae_{11}) - (ae_{11})A_1) = \bar{a}e_{11}$，所以有 $d(ae_{11}) = \bar{\delta}(ae_{11}) + d_{A_1}(ae_{11})$.

当 $i > 1$ 时，有 $d(e_{i1}) = \sum_{j=2}^{n} r_{j1}^{(i)} e_{j1}$. 而另一方面，由 $\delta(1) = \delta(1^2) = \delta(1)\cdot 1 + 1\cdot\delta(1) = \delta(1)+\delta(1)$ 及 R 的条件知，$\delta(1) = 0$. 再根据 A_1 的定义及(2)式可知：$e_{i1}A_1 = O$，这样 $\bar{\delta}(e_{i1}) + d_{A_1}(e_{i1}) = \delta(1)e_{i1} + (A_1e_{i1} - e_{i1}A_1) = A_1e_{i1} - e_{i1}A_1 = A_1e_{i1} = \left(\sum_{j=2}^{n} d(e_{j1})e_{1j}\right) e_{i1} = d(e_{i1})e_{11} = \left(\sum_{j=2}^{n} r_{j1}^{(i)} e_{j1}\right) e_{11} = \sum_{j=2}^{n} r_{j1}^{(i)} e_{j1}$. 因此，$d(e_{i1}) = \bar{\delta}(e_{i1}) + d_{A_1}(e_{i1})$.

同样，因 $d(e_{1i}) = \sum_{j=2}^{n} c_{1j}^{(i)} e_{1j}$，而 $\bar{\delta}(e_{1i}) + d_{A_1}(e_{1i}) = \delta(1)e_{1i} + (A_1e_{1i} - e_{1i}A_1) = -e_{1i}A_1 = -e_{1i}\left(\sum_{j=2}^{n} d(e_{j1})e_{1j}\right) = -e_{1i}\left(\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n} r_{k1}^{(j)}(e_{k1})e_{1j}\right) = -\sum_{j=2}^{n} r_{i1}^{(j)} e_{1j} = \sum_{j=2}^{n}\left(-r_{i1}^{(j)}\right) e_{1j} = \sum_{j=2}^{n} c_{1j}^{i} e_{1j}$. 因此，$d(e_{1i}) = \bar{\delta}(e_{1i}) + d_{A_1}(e_{1i})$.

对于 $d(ae_{i1})$，$i > 1$，$a \in R$，有 $d(ae_{i1}) = d(e_{i1}ae_{11}) = d(e_{i1})ae_{11} + e_{i1}d(ae_{11}) = (\bar{\delta}(e_{i1}) + d_{A_1}(e_{i1}))ae_{11} + e_{i1}\bar{a}e_{11} = (\delta(1)e_{i1} + (A_1e_{i1} - e_{i1}A_1))ae_{11} + \bar{a}e_{i1} = A_1e_{i1}ae_{11} + \bar{a}e_{i1} = A_1(ae_{i1}) + \bar{a}e_{i1}$. 而 $\bar{\delta}(ae_{i1}) + d_{A_1}(ae_{i1}) = \delta(a)e_{i1} + (A_1(ae_{i1}) - (ae_{i1})A_1) = A_1(ae_{i1}) + \bar{a}e_{i1}$. 所以，$d(ae_{i1}) = (\bar{\delta}(ae_{i1}) + d_{A_1}(ae_{i1}))$.

同理可证，$d(ae_{1i}) = \bar{\delta}(ae_{1i}) + d_{A_1}(ae_{1i})$，$i > 1$，$a \in R$.

最后，当 i，$j > 1$ 时，$d(ae_{ij}) = d(ae_{i1}e_{1j}) = d(ae_{i1})e_{1j} + ae_{i1}d(e_{1j}) = (\bar{\delta}(ae_{i1}) + d_{A_1}(ae_{i1}))e_{1j} +$

$ae_{i1}(\bar{\delta}(e_{1j})+d_{A_1}(e_{1j}))=(\delta(a)e_{i1}+(A_1ae_{i1}-ae_{i1}A_1))e_{1j}+ae_{i1}(A_1e_{1j}-e_{1j}A_1)=(\delta(a)e_{ij}+A_1(ae_{ij}))+ae_{i1}(-e_{1j}A_1)=\delta(a)e_{ij}+(A_1(ae_{ij})+(-(ae_{ij})A_1))=\delta(a)e_{ij}+(A_1ae_{ij}-ae_{ij}A_1)=\bar{\delta}(ae_{ij})+d_{A_1}(ae_{ij})$.

这样 $\forall a\in R$，$1\leqslant i, j\leqslant n$，均有 $d(ae_{ij})=\bar{\delta}(ae_{ij})+d_{A_1}(ae_{ij})$. 所以，$\forall X=(x_{ij})\in M_n(R)$，$d(X)=d(\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}e_{ij})=\sum_{i,j=1}^{n}d(x_{ij}e_{ij})=\sum_{i,j=1}^{n}(\bar{\delta}(x_{ij}e_{ij})+d_{A_1}(x_{ij}e_{ij}))=\sum_{i,j=1}^{n}\bar{\delta}(x_{ij}e_{ij})+\sum_{i,j=1}^{n}d_{A_1}(x_{ij}e_{ij})=\bar{\delta}\left(\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}e_{ij}\right)+d_{A_1}\left(\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}e_{ij}\right)=\bar{\delta}(X)+d_{A_1}(X)$. 于是 $d=\bar{\delta}+d_{A_1}$. 此时，取 $A=A_1$，则有 $d=\bar{\delta}+d_A$.

情形 2　$d(e_{11})\neq 0$. 此时不妨设 $d(e_{11})=(a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ij}\in R$. 则有：

$$(a_{ij})_{n\times n}=d(e_{11})=d(e_{11}e_{11})=d(e_{11})e_{11}+e_{11}d(e_{11})=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

所以，$a_{11}=a_{11}+a_{11}$，由 R 的条件知，$a_{11}=0$. 于是

$$d(e_{11})=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

再设 $d(e_{k1})=(r_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，$d(e_{1k})=(c_{ij}^{(k)})_{n\times n}(k>1)$，那么当 $i>1$时，

$$O=d(e_{11}e_{i1})=d(e_{11})e_{i1}+e_{11}d(e_{i1})=\begin{pmatrix}a_{1i}+r_{11}^{(i)} & r_{12}^{(i)} & \cdots & r_{1n}^{(i)}\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

于是，$a_{1i}+r_{11}^{(i)}=0$，即 a_{i1} 是可反元. 同样，当 $i>1$时，

$$O=d(e_{1i}e_{11})=d(e_{1i})e_{11}+e_{1i}d(e_{11})=\begin{pmatrix}a_{i1}+c_{11}^{(i)} & 0 & \cdots & 0\\ c_{21}^{(i)} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1}^{(i)} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

于是，$a_{i1}+c_{11}^{(i)}=0$，即 a_{1i} 是可反元. 因此 $d(e_{11})$ 是可反矩阵.

现令：

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

则 A_0 是可反矩阵并且 $d(e_{11})+d_{A_0}(e_{11})=O$.

设 $h=d+d_{A_0}$，则由引理 1知，h 是 $M_n(R)$ 上的一个导子，且 $h(e_{11})=d(e_{11})+d_{A_0}(e_{11})=O$. 由情形 1知，存在 R 上的一个导子 δ 和一个可反矩阵 A_1，使得 $h=\bar{\delta}+d_{A_1}$，所以 $d=d+d_O=d+d_{A_0+(-A_0)}=d+(d_{A_0}+d_{(-A_0)})=(d+d_{A_0})+d_{(-A_0)}=h+d_{(-A_0)}=(\bar{\delta}+d_{A_1})+d_{(-A_0)}=\bar{\delta}+d_{(A_1-A_0)}$.

现取 $A=A_1-A_0$，则 A 是可反矩阵，并且 $d=\bar{\delta}+d_A$.

推论 1　交换环 R 上的 n 阶全矩阵环上的每个导子均可表示为一个内导子和 R 的一 个诱导导子之和.

定理 2　设 R 是一个交换半环且满足 $\forall a\in R$，由 $a+a=a$ 可推出 $a=0$，d 是 $M_n(R)$ 上的一个导子，如果存在 R 上的 2个导子 δ 与 δ' 和 $M_n(R)$ 中的 2个可反矩阵 A 与 A'，使得 $d=\bar{\delta}+d_A=\bar{\delta}'+d_{A'}$，那么 $\bar{\delta}=\bar{\delta}'$ 并且存在一个可反元 $a\in R$，使得 $A'=A+aI_n$.

证明 由于 $d=\bar{\delta}+d_A=\bar{\delta}'+d_{A'}$, 则 $\forall i, j\in\{1, 2, \dots, n\}$, 均有 $\bar{\delta}(e_{ij})+d_A(e_{ij})=\bar{\delta}'(e_{ij})+d_{A'}(e_{ij})\Rightarrow\delta(1)e_{ij}+(Ae_{ij}-e_{ij}A)=\delta'(1)e_{ij}+(A'e_{ij}-e_{ij}A')\Rightarrow Ae_{ij}-e_{ij}A=A'e_{ij}-e_{ij}A'\Rightarrow(A-A')e_{ij}=e_{ij}(A-A')\Rightarrow\sum_{s=1}^{n}(a_{si}-a'_{si})e_{sj}=\sum_{t=1}^{n}(a_{jt}-a'_{jt})e_{it}$. 因此, 当 $s\neq i$时, $a_{si}-a'_{si}=0$, 即 $a_{si}=a'_{si}$. 而当 $t\neq j$时, $a_{jt}-a'_{jt}=0$, 即 $a_{jt}=a'_{jt}$. 又当 $s=i$且 $t=j$时, 有 $a_{ii}-a'_{ii}=a_{jj}-a'_{jj}$. 所以有 $\forall i, j\in\{1, 2, \dots, n\}$, $a_{ij}=a'_{ij}(i\neq j)$, 并且 $a_{11}-a'_{11}=a_{22}-a'_{22}=\cdots=a_{nn}-a'_{nn}$.

取 $a=a'_{11}-a_{11}$, 则 a是可反元并且 $a'_{ii}=a_{ii}+a$. 于是 $A'=A+aI_n$. 又 $\forall r\in R$, 有 $\bar{\delta}(rI_n)+dA(rI_n)=\bar{\delta}'(rI_n)+d_{A'}(rI_n)$, $\Rightarrow\delta(r)I_n+(A(rI_n)-(rI_n)A)=\delta'(r)I_n+(A'(rI_n)-(rI_n)A')\Rightarrow\delta(r)I_n=\delta'(r)I_n+(ar-ra)I_n\Rightarrow\delta(r)I_n=\delta'(r)I_n\Rightarrow\delta(r)=\delta'(r)$. 于是 $\delta=\delta'$.

参考文献:

[1] Jøndrup S. Automorphisms and derivations of upper triangular matrix rings[J]. Linear Algebra Appl, 1995, 221: 205-218.
[2] Coelho S P, Milies C P. Derivations of upper triangular matrix rings[J]. Linear Algebra Appl, 1993, 187: 263-267.
[3] Benkart G M, Osborn J M. Derivations and automorphisms of nonassociative matrix algebras[J]. Trans Amer Math Soc, 1981, 263: 411-430.
(4) Jøndrup S. Automorphisms of upper triangular matrix rings[J]. Arch Math, 1987, 49: 497-502.
[5] James H. Introdution to lie algebra and representation theory[M]. New York: Springer, 1972.
[6] Golan J S. Semirings and their applications[M]. London: Kluwer Academic Publisher, 1999.
[7] Jacobson N. Basic algebra Ⅱ[M]. New York: W H Freeman and Company, 1985.
[8] 陈培慈. 半环理论与语言和自动机[M]. 南昌: 江西高校出版社, 1993.

(责任编辑: 王阿军)

(接第 633页)

参考文献:

[1] Ishikawa S. Fixed point by a new iteration method[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, 44: 147-150.
[2] 周和月, 张明虎. 一致凸 Banach空间中非扩张映射带误差的 Ishikawa迭代过程[J]. 河北师范大学学报, 2006, 30(2): 129-132.
[3] Wang L. An iteration method for nonexpansive mappings in Hilbert spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2007, 8.
[4] Tan K K, Xu H K. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iterations process[J]. J Math Anal Appl, 1993, 178: 301-308.
[5] Yamada I. The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersertion of fixed point sets of nonexpansive mappings[J]. Stud Comput Math, 2001(8): 473-504.
[6] Cho Y J, Zhou H Y, Guo G. Weak and strong convergence theorems for three-step iterations with errors for asymptotically non-expansive mappings[J]. Comp Math Appl, 2004, 47: 707-717.

(责任编辑: 沈 芸)