文章编号：1000-8152(2001)01-0001-06

非线性系统鲁棒控制理论的一些新进展*

慕春棣
（清华大学自动化系·北京，100084）
梅生伟
（清华大学电机系·北京，100084）
申铁龙
（上智大学理工学部·东京，102-8554，日本）

摘要：非线性系统的控制是目前自动控制理论研究的一个新热点. 首先给出了近年来非线性系统理论研究基本结果的简要回顾，在此基础上，以非线性系统的鲁棒镇定和鲁棒 L_2 干扰抑制问题为主线，概括介绍了基于耗散性的非线性系统鲁棒控制理论研究领域的一些新进展.

关键词：非线性系统；耗散性；无源性；递推设计方法；鲁棒镇定；鲁棒 H_∞ 控制
文献标识码：A

New Developments in Robust Nonlinear Control Theory

MU Chundi
(Department of Automation, Tsinghua University·Beijing, 100084, P.R.China)
MEI Shengwei
(Department of Electrical Engineering, Tsinghua University·Beijing, 100084, P.R.China)
SHEN Tielong
(Department of Mechanical Engineering, Sophia University·Tokyo, 102-8554, Japan)

Abstract: This paper reviews briefly the basic researching results in the nonlinear system field for recent years, introduces some new advances of nonlinear robust control based on the dissipative system theory. The attention is focused on the robust stabilization and the robust L_2-gain disturbance attenuation problems for nonlinear systems with gain bounded uncertainty.

Key words: nonlinear system; dissipation; passivity; recursive design; robust stabilization; robust H_∞ control

1 引言(Introduction)

在实际系统中，被控对象往往伴随着各种各样的不确定性. 因此，我们只能基于近似描述被控对象的标称数学模型来设计控制系统. 所谓鲁棒性就是指系统预期的设计品质不因不确定性的存在而遭到破坏的特性. 因此，鲁棒控制对非线性系统理论来讲同样是一个重要课题. 基于微分几何的非线性系统控制理论的出现[1,2]，极大地促进了非线性系统鲁棒控制理论的研究，它与李雅普诺夫稳定性理论、小增益理论以及耗散性或无源性等理论相结合、给出了许多有效的鲁棒系统分析和设计方法.

鲁棒镇定是非线性鲁棒控制问题的基本问题，其主要设计方法目前仍然以李雅普诺夫稳定性定理为基础. 利用这类方法设计鲁棒镇定系统时，首先假设不确定性因素可以表示为有界的未知参数、增益有界的未知摄动函数或未知动态过程. 然后根据其上界值或界函数以及被控对象的标称模型来构造一个适当的李雅普诺夫函数，使其保证整个系统对于不确定性集合中的任何元素都是稳定的. 这种设计方法的关键是如何给出构造理想的李雅普诺夫函数的一般方法. 近年来鲁棒控制理论的研究表明，如果系统满足一定的链式结构，就可通过递推设计的方法逐步构造出理想的李雅普诺夫函数[3]. 而利用基于微分几何的非线性系统理论，我们可以给出判定一个系统本质上是否具有上述链式结构的几何条件，并给出通过坐标变换将系统的数学模型变成显式的链式结构的一般方法. 文献[4,5]按照这种思路讨论了不确定性可用未知参数描述时的鲁棒镇定问题. 文献[6~8]则研究了不确定性可以用未知的非线性摄动函数来描述的情况. 这种设计思想还可推广到不确定性具有动态过程的情况[9,10]以及多个非线性子系统相互串联构成的大规模复杂系统的鲁棒镇定问题[11]. 应该指出，上述基于李雅普诺夫函数的镇定理论，还可以从系统无源性的角度加以解释[1]. 或者更确切地讲，上述李雅普诺夫函数的构造过程正是使系统无源化的过程，而此时的李雅普诺夫函数正是保证系统无源性的存储函数. 文献[12]的一个重要贡献就是给出了判定非线性系统无源性的 KYP 引理，并提示了对于非线性系统可以递推构造

* 基金项目：中国清华大学和日本上智大学友好交流项目、中国国家自然科学基金(NSFC)与日本学术振兴会(JSPS)国际合作研究基金(59911140586)，以及中国国家自然科学基金(59837270, 69934010)资助项目.
收稿日期：1999-06-23；收修改稿日期：2000-02-17.

存储函数的可能性.上述有关鲁棒镇定问题的结果[4~8]正是这种设计思路的一个推广,而文献[6]还给出了判定具有不确定性系统的鲁棒无源性的鲁棒KYP引理.

实际上,无源性是系统耗散性概念的一个特例.对于给定的能量供给率,如果存在一个依赖于系统状态的非负能量存储函数,使得耗散不等式成立,则称该系统是耗散的.无源性正是供给率为输入输出信号之乘积形式的特例.工程中常用的另一个特例是供给率由输入到输出信号的范数之差给出的情况.如果系统对于这类供给率是耗散的,那么该系统由输入到输出就满足 L_2 增益约束条件[13].因此,许多与 L_2 增益约束有关的控制问题,如 L_2 综合问题[14]、H_∞ 控制[13,15]以及干扰近似解耦或 L_2 干扰抑制[13]等,都可以归结为使系统成为耗散系统的问题.一般,这类设计问题都需要解适当的 Hamilton-Jacobi-Issacs(HJI)偏微分不等式[13,14],而该不等式目前尚无有效的解析求解方法.如果我们将上述构造存储函数的方法加以推广,使其满足所对应的耗散不等式,就有可能不必通过求解HJI不等式得到鲁棒 L_2 增益控制器.文献[16]针对具有参数不确定性和有界函数摄动情况,给出了鲁棒 L_2 干扰抑制问题的解.文献[17]则讨论了不确定性的界函数满足三角结构时的干扰近似解耦或干扰抑制问题.而对非线性鲁棒 H_∞ 控制问题,文献[18,19]研究了不必求解HJI的设计方法.

本文以基于耗散性或无源性理论的镇定和 L_2 干扰抑制控制器设计方法为主线,介绍非线性系统鲁棒控制理论的一些新结果.

2 非线性控制的基本结果(Important results of nonlinear control)

2.1 相对阶与反馈线性化(Relative degree and feedback linearization)

考察非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \tag{1}$$

其中,x 是状态变量,u 和 y 分别是输入和输出信号.

定义 1[1] 若存在一正数 $v(1 \leqslant v \leqslant n)$ 满足如下条件

$$\begin{cases} L_gL_f^ih(x) = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant v-2,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ L_gL_f^{v-1}h(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

则称系统(1)具有相对阶 v.其中,记号 $L_fh(x)$ 表示函数 $h(x)$ 沿向量场 f 的微分.记 $f(x) = [f_1(x),\cdots,f_n(x)]^{\mathrm{T}}$,则 $L_fh = \dfrac{\partial h}{\partial x}f$,而 $L_f^ih(x) = L_f\{L_f^{i-1}h\}$,$L_f^0h(x) = h(x)$.

设 $f(x) = Ax, g(x) = B, h(x) = Cx$,则定义1的条件等价于 $CB = 0, CAB = 0,\cdots, CA^{v-2}B = 0, CA^{v-1}B \neq 0$.显然该定义是线性系统相对阶的一个推广.在非线性系统中,相对阶的意义在于它描述了系统非线性结构的本质.若系统(1)具有相对阶 v,则在一定的几何条件假设下,可以找到适当的函数 $z = T_0(x),(z \in \mathbb{R}^{n-v})$ 使得系统(1)通过坐标变换

$$z = T_0(x),\ \xi_1 = h(x),\ \xi_2 = L_fh(x),\ \cdots,\ \xi_v = L_f^{v-1}h(x) \tag{2}$$

和状态反馈

$$u = \{L_gL_f^{v-1}h(x)\}^{-1}[v - L_f^vh(x)], \tag{3}$$

变成如下形式:

$$\dot{z} = f_0(z,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_v),\ \dot{\xi}_1 = \xi_2,\ \dot{\xi}_2 = \xi_3,\cdots,\dot{\xi}_v = v.$$

2.2 最小相位与零输出动态(Minimum-phase and zero dynamics)

所谓系统(1)的零动态是指当输出 y 恒为零时的动态过程.根据反馈等价性[1],输出恒为0,当且仅当 $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_v = 0$.因此,零动态可以描述为 $\dot{z} = f_0(z,0,\cdots,0)$.

定义 2[1] 若 $z = 0$ 是系统 $\dot{z} = f_0^*(z)$ 的渐近稳定的平衡点,即存在一连续可微的正定函数 $w(z)$ 使 $L_{f_0^*}w(z) < 0$, $\forall z \neq 0$,则称系统(1)是最小相位的,其中 $f_0^*(z) = f_0(z,0,\cdots,0)$.

2.3 无源性与稳定性,KYP引理(Passivity, stability and KYP lemma)

Lyapunov意义下的稳定性反映了在没有外部激励的条件下系统的广义能量的衰减特性.所谓无源性,乃是指系统在有外界输入时的能量衰减特性.

定义 3[12] 对于系统(1),若存在非负定函数 $V(x)(V(0) = 0)$(称为存储函数)使得不等式

$$V(x(t)) \leqslant V(x(0)) + \int_0^t u(\tau)^{\mathrm{T}}y(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

对于任意输入函数 $u(\tau)$ 成立,则称系统(1)是无源的.上述不等式则称为无源不等式.

如果我们把 $u^{\mathrm{T}}y$ 看成外部向系统供给的能量供给率,那么不等式(4)表明 t 时刻系统所具有的能量 $V(x(t))$ 总是小于初始时刻能量 $V(x(0))$ 与0到 t 时间内外部提供的能量之和,即系统总是消耗能量的.如果 $V(x)$ 对时间 t 是可微的,那么(4)式等价于

$$\dot{V} \leqslant u^{\mathrm{T}}y, \tag{5}$$

式中 $\dot{V}$ 表示 $V(x)$ 沿系统(1)的轨迹对时间的微分.本文只考虑 V 为连续可微的情况.

如果上述不等式严格成立,则称系统是严格无源的.根据Lyapunov稳定性定理可知,如果系统(1)是严格无源的,且 $V(x)$ 是正定函数,那么其自由系统 $\dot{x} = f(x)$ 是全局渐近稳定的.此时的存储函数是Lyapunov函数,满足 $\dot{V} < u^{\mathrm{T}}y = 0$, $\forall x \neq 0$.

若系统是无源的,且是零状态可检测的[14],或是最小相位的,那么令 $u = -\varphi(y)$,$\varphi(y)$ 是满足 $\varphi^{\mathrm{T}}(y)y \geqslant 0$ 且 $\varphi(0) = 0$ 的任意函数,则根据Lasalle不变集定理[20],容易验证,闭环系统 $\dot{x} = f(x) - g(x)\varphi(y)$ 是全局渐近稳定的.

引理 1(KYP引理[12]) 存在可微的非负定函数 $V(x)$ 使得系统(1)是无源的,当且仅当 V 满足

$$L_fV(x) \leqslant 0,\ L_gV(x) = h^{\mathrm{T}}(x). \tag{6}$$

2.4 耗散性与 L_2 增益、HJI(Dissipativity, L_2-gain and Hamilton-Jacobi Inequality)

定义 4 对于系统(1),考虑适当的函数 $s(u,y)$,若存在正定函数 $V(x)$,使得

$$V(x(t)) \leqslant V(x(0)) + \int_0^t s(u,y)\mathrm{d}\tau,$$

或者当 V 可微时,等价地

$$\dot V \leqslant s(u(t),y(t)),\ \forall t \geqslant 0 \tag{7}$$

对任意 u 成立,则称系统(1)对供给率 $s(u,y)$ 是耗散的,而 V 称为存储函数.

与前述的无源性概念对照可知,耗散性是针对更为一般意义下的能量供给率而言的.无源性是 $s = u^{\mathrm T}y$ 时耗散性的特例.考虑如下定义的供给率:

$$s(u,y) \triangleq \frac{1}{2}\{\gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2\}. \tag{8}$$

若存在可微的函数 V,使系统(1)对上述供给率是耗散的,那么不难证明该系统满足 L_2 增益约束条件 $\|y\|_2 \leqslant \gamma\|u\|_2$, $\forall u$,其中 $\|\cdot\|_2$ 为广义 L_2 范数即 $\|u\|_2 \triangleq (\int_0^{t_0} u^{\mathrm T}u\mathrm{d}t)^{1/2}$, $t_0 > 0$ 是任意给定常数.

可以证明,对于给定供率(8),存在正定可微函数 V 满足耗散不等式(7)的充分必要条件是 V 满足如下 HJI[13,14]:

$$L_fV(x) + \frac{1}{2\gamma^2}\|L_g^{\mathrm T}V(x)\|^2 + \frac{1}{2}\|h(x)\| \leqslant 0. \tag{9}$$

设被控对象的状态方程给定如下,其中 w 表示干扰信号:

$$\begin{cases}\dot x = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u,\\ y = h(x) + k(x)u.\end{cases} \tag{10}$$

所谓 L_2 增益综合问题是指对给定的 $\gamma > 0$,求反馈控制 $u = \alpha(x)$,使得 $x = 0$ 是对应闭环系统的渐近稳定平衡点,且 $\|y\|_2 \leqslant \gamma\|w\|_2$, $\forall w$ 成立.

2.5 Lyapunov 函数的递推设计(Lyapunov-based recursive design)

考察非线性串联系统

$$\begin{cases}\dot x_1 = f(x_1) + \varphi(x_1,x_2),\\ \dot x_2 = u.\end{cases} \tag{11}$$

其中 $f(0) = 0$,假设该系统满足:1) $x_1 = 0$ 是子系统 $\dot x_1 = f(x_1)$ 的渐近稳定的平衡点;2) 子系统之间的耦合项满足 $\varphi(x_1,0) = 0$. 则由 Lyapunov 逆定理[1]知,存在一个正定函数 $W(x_1)$ 满足 $L_fW(x_1) < 0, \forall x_1 \neq 0$,又,在假设2)下,$\varphi$ 可以分解为 $\varphi(x_1,x_2) = \Psi(x_1,x_2)x_2$[6].

对于这类系统,可基于 W 递推构造 Lyapunov 函数及反馈控制律如下:

令

$$V(x) = W(x_1) + \frac{1}{2}x_2^{\mathrm T}x_2. \tag{12}$$

沿着闭环系统轨迹求 V 的微分,并利用式(11)及上述分解式,得

$$\dot V(x_1,x_2) = \frac{\partial W}{\partial x_1}\dot x_1 + x_2^{\mathrm T}\dot x_2 =$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}f(x_1) + x_2\Big[\frac{\partial^{\mathrm T} W}{\partial x_1}\Psi(x_1,x_2) + u\Big].$$

显然使 $(x_1,x_2) = (0,0)$ 成为闭环系统渐近稳定平衡点,即 $\dot V < 0, \forall x_1 \neq 0, \forall x_2 \neq 0$ 的控制律为

$$u = -\frac{\partial^{\mathrm T} W}{\partial x_1}\Psi(x_1,x_2) - \varepsilon x_2.$$

实际上,上述构造 Lyapunov 函数的过程还可以推广到非线性子系统与多个积分器相串联的情况,此时整个系统的 Lyapunov 函数有如下结构:

$$V(x,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_v) =$$

$$W(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{v}\{\xi_i - \alpha_i(x,\xi_1,\cdots,\xi_i)\}^{\mathrm T}\{\xi_i - \alpha_i(x,\xi_1,\cdots,\xi_i)\}.$$

其中 α_i 是第 i 步设计的反馈控制律.这个设计过程称为 Backstepping 法或 Lyapunov 递推设计[3].

3 鲁棒无源化——鲁棒镇定问题(Robust passivation-robust stabilization)

3.1 不确定系统的描述(Description of uncertain nonlinear system)

具有不确定性的非线性系统可描述为:

$$\begin{cases}\dot x = f(x) + \Delta f(x) + g(x)u,\\ y = h(x).\end{cases} \tag{13}$$

设 $f(0) = 0, h(0) = 0$, Δf 表示不确定性摄动函数,且可以表示为 $\Delta f(x) = e(x)\delta(x)$,其中 e 为已知而 δ 为未知映射,属于集合 $\Omega = \{\delta(x) \mid \|\delta(x)\| \leqslant \|n(x)\|, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$, $n(x)$ 是已知的有界函数. 当 $\Delta f(x) = 0$,系统(13)就成为系统(1),称为相应的标称系统.

如第2节所述,若标称系统及 $e(x)$ 满足一定的几何条件,采用坐标变换(2)和状态反馈(3)可将系统(13)变换成下述标准型

$$\begin{cases}\dot z = f_0(z,\xi_1) + f_1(z,\xi_1)\delta(z,\bar\xi_v),\\ \dot\xi_1 = \xi_2 + \varphi_1(z,\bar\xi_1)\delta(z,\bar\xi_1),\\ \quad\vdots\\ \dot\xi = v + \varphi_v(z,\bar\xi_v)\delta(z,\bar\xi_v).\end{cases} \tag{14}$$

这里

$$\bar\xi_i^{\mathrm T} = [\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_i],\ f_1 = L_eT_0(T^{-1})(z,\bar\xi_v)),$$

$$\varphi_i = L_e L_f^{i-1}h(T^{-1}(z,\bar\xi_i))(1 \leqslant i \leqslant v).$$

T^{-1} 表示坐标变换(2)的逆变换.上述标准型(14)是以下的系统鲁棒镇定及鲁棒 H_∞ 控制设计的标准形式.

3.2 鲁棒无源性(Robust passivity)

定义 5[6] 系统(13)是鲁棒无源的,系指存在一次可微的非负定函数 $V(x)$,使得

$$\begin{cases}L_{f+\Delta f}V(x) \leqslant 0,\\ L_gV(x) = h^{\mathrm T}(x)\end{cases} \tag{15}$$

对所有 Δf 成立.如果不等式(15)是严格不等式,则系统(13)是严格鲁棒无源的.

引理 2(鲁棒 KYP 引理[6]) 系统(13)是鲁棒无源的,当且仅当 $V(x)$ 使得下式成立:

$$\begin{cases}L_fV(x) + \|L_eV(x)\|\,\|n(x)\| \leqslant 0,\\ L_gV(x) = h^{\mathrm T}(x).\end{cases} \tag{16}$$

这个引理是前节 KYP 引理的一个推广,它描述了系统

鲁棒无源性的充分必要条件，但是(16)式不适用于设计控制器．文献[6,7]还给出了基于 HJI 形式的充分条件．

引理 3 如果存在一个正实函数 $\lambda(x)$ 和非负一次可微函数 $V(x)$，满足

$$\begin{cases} L_f V(x)+\dfrac{\lambda(x)}{2}\|L_e V(x)\|^2+\dfrac{1}{2\lambda(x)}\|n(x)\|^2\leqslant 0,\ \forall x,\\ L_g V(x)=h^{\mathrm{T}}(x). \end{cases} \tag{17}$$

则系统(13)是鲁棒无源的．

若将(17)式中不等式改为严格不等式，则可以证明条件(17)是严格鲁棒无源性的充分必要条件[6]．

3.3 鲁棒镇定控制器(Robust stabilization controller)

为简单起见，以下只考虑相对阶 $v=1$ 的情况．在一定条件下，下述方法可推广到 $v>1$ 的情况．当标称系统(1)的相对阶 $v=1$ 时，系统(14)具有如下形式：

$$\begin{cases} \dot z=f_0(z,y)+f_1(z,y)\delta(z,y),\\ \dot y=u+b_1(z,y)\delta(z,y). \end{cases} \tag{18}$$

对于(18)，考虑反馈控制 $u=c(x)+v$．选取 $c(x)$ 使得存在一个正定可微的存储函数 V，保证闭环系统从 v 到 y 是鲁棒无源的，令 $v=-\Psi(y)$，则相应的闭环系统就是鲁棒稳定的．即鲁棒镇定控制器为 $u=c(x)-\Psi(y)$．

记 $f_0^*=f_0(z,0),f_1^*=f_1(z,0),\delta^*=\delta(z,0)$，该系统的零动态可表示为：

$$\dot z=f_0^*(z)+f_1^*(z)\delta^*(z).$$

定理 1[6] 考虑系统(18)．设存在一个可微的正定、正则函数 $W(z)$，使得对所有 $\delta^*\in\Omega$，有 $\dfrac{\partial W}{\partial z}\{f_0^*(z)+f_1^*(z)\delta^*(z)\}<0,\forall z\neq 0$，或等价地[7]

$$L_{f_0^*}W+\frac{\lambda(z)}{2}\|L_{f_1^*}W\|^2+\frac{1}{2\lambda(z)}\|\bar n(z,0)\|^2<0,\forall z\neq 0. \tag{19}$$

则使 $(z,y)=(0,0)$ 成为相应的闭环系统全局稳定平衡点的反馈控制律给定如下：

$$u=-\left\{c_0(z,y)\frac{\partial^{\mathrm{T}}W}{\partial z}+c_1(z,y)\right\}-\Psi(y). \tag{20}$$

式中 $\Psi(y)$ 为满足 $y\Psi(y)>0$ 的任意函数，且 c_0 和 c 由下式给定：

$$c_0(z,y)=$$
$$\hat f_0^{\mathrm{T}}(z,y)+\lambda(z)\{\hat f_1(z,y)+b_1(z,y)\}\{f_1^*(z)\}^{\mathrm{T}},$$
$$c_1(z,y)=$$
$$\frac{\lambda(z)}{2}\{\hat f_1(z,y)+b_1(z,y)\}\{\hat f_1^{\mathrm{T}}(z,y)+b_1^{\mathrm{T}}(z,y)\}y+$$
$$\frac{1}{\lambda(z)}\hat n^{\mathrm{T}}(z,y)\{\bar n(z,0)+\frac{1}{2}\hat n(z,y)y\}.$$

且 $\hat f_0,\hat f_1,\hat n$ 分别是满足如下分解式的给定函数：

$$\begin{cases} f_0(z,y)=f_0^*(z)+\hat f_0(z,y)y,\\ \bar n(z,y)=\bar n(z,0)+\hat n(z,y)y,\\ f_1^{\mathrm{T}}(z,y)\dfrac{\partial^{\mathrm{T}}W}{\partial z}=\{f_1^*(z)\}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial^{\mathrm{T}}W}{\partial z}+\hat f_1^{\mathrm{T}}(z,y)y. \end{cases} \tag{21}$$

该定理可通过递推构造 Lyapunov 函数来证明，详见文献[6]．

3.4 非线性串联系统的鲁棒镇定控制器设计(Design of robust stabilization controller for nonlinear cascaded systems)

考虑具有不确定性的由两个子系统串联构成的非线性系统

$$\begin{cases} \dot x=f_1(x)+C(x,\xi,y)y+\Delta f_1(x,\xi,y),\\ \dot\xi=f_2(\xi)+G(\xi)u+\Delta f_2(\xi),\\ y=h(\xi). \end{cases} \tag{22}$$

其中 $\Delta f_1(x,\xi,y)=E_1(x,y)\delta_1(x,\xi,y),\Delta f_2(\xi)=E_2(\xi)\delta_2(\xi)$．这里 E_1 和 E_2 是已知的光滑映射，δ_1 和 δ_2 是未知但有界的映射，满足 $\|\delta_1(x,\xi,y)\|^2\leqslant\rho_1(x,y),\|\delta_2(\xi)\|^2\leqslant\rho_2(\xi)$．$\rho_1,\rho_2$ 为已知函数．f_1,C,f_2,G 是相应维数的光滑映射．同前所述，将光滑函数 $\|L_{E_1}V\|^2$ 和 $\|\rho_1\|^2$ 分解为

$$\|L_{E_1}V\|^2=\|L_{E_*}V\|^2+M_e(x,y)y,$$
$$\|\rho_1(x,y)\|^2=\|\rho_*(x)\|^2+M_\rho(x,y)y.$$

这里 $E_*(x)=E_1(x,0),\rho_*(x)=\rho_1(x,0)$．$M_e$ 和 M_ρ 为适当的函数．

定理 2[11] 假设系统(22)满足如下条件：

1) x 子系统是鲁棒渐近稳定的，即存在正定函数 $V(x)$ 和标量 $\epsilon_1>0$，满足

$$L_{f_1}V+\frac{1}{2}\|L_{E_*}V\|^2+\frac{1}{2}\|\rho_*(x)\|^2\leqslant-\epsilon_1V(x);$$

2) 以 u 为输入、y 为输出的 ξ 子系统是鲁棒无源的，即存在一正定函数 W 满足

$$L_{f_2}W+\frac{1}{2}\|L_{E_2}W\|^2+\frac{1}{2}\|\rho_2(\xi)\|^2\leqslant 0,$$
$$L_GW=h^{\mathrm{T}}(\xi),\ \forall x;$$

3) $\{f_2+E_2\delta_2,h\}$ 对所有 δ_2 是可检测的．

则使该系统鲁棒全局渐近稳定的反馈控制器给定如下：

$$u=-L_c^{\mathrm{T}}V-\frac{1}{2}M_e^{\mathrm{T}}(x,y)-\frac{1}{2}M_\rho^{\mathrm{T}}(x,y)+y. \tag{23}$$

4 鲁棒 H_∞ 控制——鲁棒干扰抑制问题(Robust H_∞ control — robust disturbance attenuation)

4.1 鲁棒耗散性与 L_2 增益(Robust dissipation and L_2-gain)

考虑如下具有不确定性的非线性系统

$$\begin{cases} \dot x=f(x)+\Delta f(x)+g(x)u+p(x)w,\\ y=h(x). \end{cases} \tag{24}$$

这里 w 是干扰输入，p 是光滑映射，$\Delta f(x)=e(x)\delta(x)$，$\delta(x)\in\Omega$．

对于给定的 $\gamma>0$，寻找光滑反馈 $u=\alpha(x)$，使得对于所有 $\delta(x)\in\Omega,x=0$ 成为闭环系统全局渐近稳定的平衡点，且从干扰 w 到输出 y 的 L_2 增益小于给定的 γ．这就是鲁棒 L_2 增益综合(或鲁棒 H_∞ 控制)问题[14,21]．从 L_2 增益到 γ 耗散的关系来看，这实际上等价于求一个控制器 $K(x)$，使得存在一次可微的正定、正则的函数 $V(x)$，满足

$$\frac{\partial V}{\partial x}\{f(x)+e(x)\delta(x)+g(x)K(x)+p(x)w\}<\frac{1}{2}\{\gamma^2\|w\|^2-\|y\|^2\},\ \forall w. \tag{25}$$

一般情况下,这类鲁棒 L_2 设计问题均可以归结于求 HJI 的问题(详见文献[14,21]). 但是,如果我们着眼于系统的具体结构,就可能避开求解 HJI,通过递推的方式构造满足上述耗散不等式的 $V(x)$ 和反馈控制律 $\alpha(x)$. 详见文献[16,19,22].

4.2 鲁棒干扰抑制控制器(Robust disturbance attenuation controller)

我们仍假定系统的相对阶为1,则系统(24)反馈等价于

$$\begin{cases}\dot{\xi} = f_0(\xi, y),\\ \dot{y} = u + b_0(\xi, y)\delta_0(\xi, y) + p_0(\xi, y)w,\\ z = h_0(\xi, y).\end{cases} \tag{26}$$

对该系统的零动态,我们假设存在一个径向无界函数 $W(\xi)$ 及正数 $\varepsilon > 0$, 有

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}f_* \leqslant -\varepsilon W(\xi),\ \forall \xi. \tag{27}$$

其中 $f_*(\xi) = f_0(\xi, 0)$, 那么,我们可以构造单调增正值函数 K, 使得下式成立[16]:

$$\frac{1}{2}\{\|h_*(\xi)\|^2 + \|n_*(\xi)\|^2\} \leqslant K(W). \tag{28}$$

其中 $h_*(\xi) = h_0(\xi, 0), n_*(\xi) = n_0(\xi, 0)$. 基于 K, 构造正定函数如下:

$$V_0(W) = W\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}K(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \int_W^{2W}K(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{29}$$

则可以证明,在如下定理3给出反馈控制器下, V_0 满足闭环系统所对应的耗散不等式[19].

定理 3[19] 设存在 $W(z)$ 使得(27)式成立,令反馈控制器给定如下:

$$u = -\alpha(\xi, y) - \varepsilon_0 y, \tag{30}$$

$$\alpha(\xi, y) = [L_{f_1}W]^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}W} + \frac{1}{2k}(b_0 b_0^{\mathrm{T}} + p_0 p_0^{\mathrm{T}})y + \frac{k}{2}(n_1^{\mathrm{T}}n_1 + h_1^{\mathrm{T}}h_1)y + k(n_1^{\mathrm{T}}n_* + h_1^{\mathrm{T}}h_*).$$

则对应的闭环系统满足如下性能要求: 1) 当 $w = 0$ 时, $(\xi, y) = (0,0)$ 是鲁棒渐近稳定的平衡点; 2) 对任意给定的 t_0, 满足 $\int_0^{t_0}\|z\|^2\mathrm{d}\tau \leqslant \int_0^{t_0}\|w\|^2\mathrm{d}\tau, \forall w$, 其中, $\varepsilon_0 > 0$ 为任意给定常数, $k > 0$ 为充分小正数. 且 f_1, h_1, n_1 分别为满足如下分解式的函数:

$$f_0 = f_*(\xi) + f_1(\xi, y)y,$$
$$h_0 = h_*(\xi) + h_1(\xi, y)y,$$
$$n_0 = n_*(\xi) + n_1(\xi, y)y.$$

4.3 线性系统的特例(Example of linear system)

熟知对于线性定常系统, H_∞ 设计问题可以归结为与 HJI 对应的代数 Riccati 方程求解问题. 当标称系统是线性、而不确定性为非线性时,同样也可通过求解 Riccati 方程得到鲁棒 H_∞ 控制器[20]. 但是,如果用上述方法,同样可以得到鲁棒 H_∞ 控制器.

给定如下具有不确定性的线性系统:

$$\begin{cases}\dot{\xi} = A_0\xi + A_1 y,\\ \dot{y} = u + B\delta(\xi, y) + Pw,\\ z = C_0\xi + C_1 y.\end{cases} \tag{31}$$

显然,这是非线性系统(26)式的一个特例. 设不确定性非线性函数满足 $\|\delta(\xi, y)\| \leqslant \|N_0\xi + N_1 y\|, \forall \xi, y, N_0$ 及 N_1 为已知阵.

该系统的零动态可表示为 $\dot{\xi} = A_0\xi$, 若 A_0 是渐近稳定阵,这时对于任意给定的正定阵 Q, 一定存在 Lyapunov 方程 $A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 = -Q$ 的正定对称解矩阵 P. 现构造二次型函数 $W(\xi) = \xi^{\mathrm{T}}P\xi$, 则对充分小 $\varepsilon > 0$, 有

$$\dot{W}(\xi) = \xi^{\mathrm{T}}(A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0)\xi = -\xi^{\mathrm{T}}Q\xi \leqslant -\varepsilon W(\xi). \tag{32}$$

令 $\gamma = \frac{1}{2\sigma_{\min}(P)}\sigma_{\max}\left(\begin{bmatrix}C_0\\ N_0\end{bmatrix}\right)$; 并定义单调增函数 $K(W) = \gamma W$. 可验证 $K(W)$ 满足:

$$\frac{1}{2}\{\|h_*(\xi)\|^2 + \|n_*(\xi)\|^2\} = \frac{1}{2}\xi^{\mathrm{T}}(C_0^{\mathrm{T}}C_0 + N_0^{\mathrm{T}}N_0)\xi \leqslant K(W).$$

与(29)式相同,构造正定函数 V 如下:

$$V_0(W) = W\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}K(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \int_W^{2W}K(\theta)\mathrm{d}\theta = \gamma W + \frac{3}{2}\gamma W^2. \tag{33}$$

与(26)的分解式对照,可取 $f_1(\xi, y) = A_1, h_1(\xi, y) = C_1, n_1(\xi, y) = N_1$. 故,由定理3可得鲁棒干扰抑制控制器如下:

$$u = -2A_1^{\mathrm{T}}P\xi(\gamma + 3\gamma\xi^{\mathrm{T}}P\xi) - \varepsilon_0 y - \frac{1}{2k}\{BB^{\mathrm{T}} + PP^{\mathrm{T}}\}y - \frac{k}{2}\{N_1^{\mathrm{T}}N_1 + C_1^{\mathrm{T}}C_1\}y - k\{N_1^{\mathrm{T}}N_0 + C_1^{\mathrm{T}}C_0\}\xi - \varepsilon_0 y.$$

$\varepsilon_0 > 0$ 为任意常数, $k > 0$ 为充分小正数.

5 结束语(Conclusion)

本文介绍了非线性系统鲁棒控制理论研究领域的一些新成果. 论述的重点主要集中在状态反馈和系统的不确定性可以用有界非线性摄动函数描述的情况. 这些成果建立在耗散性等经典的系统理论和以微分几何为框架的现代非线性系统理论自身的发展基础之上. 为了突出介绍该领域的新动态,本文并未涉及其他的非线性鲁棒控制方法以及许多有关可参数化不确定系统的鲁棒控制问题,有兴趣的读者可参阅文献[4,5]及有关参考文献. 另外,关于本文所介绍的设计思想的应用(特别是应用于机器人系统的研究结果),可参阅文献[23~25].

最后,还应该指出这里介绍的理论本身还有待于进一步完善和发展. 例如,为了将本文介绍的方法推广到相对阶大于1的系统,不确定性的界函数至少要求满足所谓的反馈结构. 不确定性满足这个约束的几何条件是有待弄清的课题. 另外,所得到控制器一般结构复杂,且增益较高. 控制器的简化、基于输出反馈的控制以及在输入限幅的条件如何设计控制器等等,也都是具有现实意义的课题.

参考文献(References)

[1] Isidori A. Nonlinear Control Systems [M]. Third Edition. London:

Springer, 1995

[2] Chen Daizhan. The Geometry of Nonlinear Systems [M]. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese)

[3] Krstic M, Kanellakopoulos I and Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995

[4] Lin W. Global robust stabilization of minimum-phase nonlinear systems with uncertainty [J]. Automatica, 1997, 33(3): 453 - 462

[5] Su W and Xie L. Robust control of nonlinear feedback passive systems [J]. Systems & Control Letters, 1996, 28(2): 85 - 93

[6] Lin W and Shen T. Robust passivity and feedback design for minimum-phase nonlinear systems with structural uncertainty [J]. Automatica, 1999, 35(1): 35 - 48

[7] Shen Tielong and katsutoshi T. Globally robust stabilization of nonlinear systems having relative degree one via passivity theory [J]. Transaction of Society of Instrumentation and Control Engineers, 1998, 34(6): 577 - 583 (in Japanese)

[8] Jiang Z P D, Hill J and Fradkov A L. A passification approach to adaptive nonlinear stabilization [J]. Systems & Control Letters, 1996, 28(2): 73 - 84

[9] Shen Tielong and Katsutoshi Tamura. Robust Lyapunov stabilization with disturbance attenuation of uncertain affine nonlinear systems [A]. Proceedings of Variable Structure & Lyapunov Techniques [C], Benevento, 1994, 117 - 124

[10] Jiang Z P and Mareels I M Y. A small-gain control method for nonlinear cascaded systems with dynamic uncertainties [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1997, 42(3): 292 - 308

[11] Shen T, Tamura K and Nikiforuk P N. Robust feedback design of nonlinear cascaded systems with structural uncertainty [A]. Preprints of IFAC World Congress [C], Beijing, 1999

[12] Byrnes C I, Isidori A and Willems J C. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1991, 36(11): 1228 - 1240

[13] Shen Tielong. H-Infinity Control Theory and Applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996 (in Chinese)

[14] van der Schaft A J. L_2-gain and passivity techniques in nonlinear control [A]. Lecture Notes in Control and Information Sciences [C], New York: Springer, 1996

[15] Isidori A. H_∞ control via measurement feedback for affine nonlinear systems [J]. Int. J. Robust and Nonlinear Control, 1994, 4(6): 553 - 574

[16] Su W, Xie L and de Souza C E. Global robust disturbance attenuation and almost disturbance decoupling for uncertain cascaded nonlinear systems [J]. Automatica, 1998, 35(4): 697 - 707

[17] Kazuhisa I, Shen Tielong, Yasuhiko M, et al. Adaptive robust control of nonlinear systems with disturbance attenuation [A]. Proceedings of 19th SICE Symposium on Adaptive Control [C], Ohita, 1999, 31 - 35 (in Japanese)

[18] Xie L and Su W. Robust L_2-gain control for a class of uncertain cascaded nonlinear systems [A]. Proceedings of 4th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision [C], Singapore, 1996, 1244 - 1247

[19] Shen Tielong and Katsutoshi T. Nonlinear robust H-infinity control - an approach based on Lyapunov function [J]. Transaction of Society of Instrumentation and Control Engineers, 1998, 34(9): 1191 - 1197 (in Japanese)

[20] Shen T, Zang H and Tamura K. Riccati equation approach to robust L_2 gain synthesis for a class of uncertain nonlinear systems [J]. Int. J. Control, 1996, 64(6): 1177 - 1188

[21] Shen T and Tamura K. Robust H_∞ control of uncertain nonlinear systems via state feedback [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1995, 40(4): 766 - 768

[22] Shen T, Xie L and Tamura K. Robust almost disturbance decoupling for nonlinear systems with structural uncertainty [A]. Proceedings of 37th IEEE Conference on Decision and Control [C], Tampa, 1998, 4107 - 4108

[23] Shen Tielong. Fundamental of Robot Robust Control [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999 (in Chinese)

[24] Ishii C and Shen T. Robust tracking adaptive control with L_2 gain disturbance attenuation for electrically driven robot manipulators [A]. The 19th SICE Symposium on Adaptive Control [C], Oita, 1999, 83 - 88

[25] Hong Y and Qin H. Passivity, optimality and stability [J]. Control Theory and Application, 1994, 11(4): 422 - 427

[26] Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems [J]. Systems & Control Letters, 1987, 8(6): 351 - 357

[27] Shen Tielogn and Katsutoshi T. Design of quadratically stabilizing controller for plants with structural and unstructural uncertainties [J]. Transaction of Society of Instrumentation and Control Engineers, 1993, 29(10): 1171 - 1175 (in Japanese)

[28] Yao B and Tomizuka M. Adaptive robust control of SISO nonlinear systems in a semi-strict feedback form [J]. Automatica, 1997, 35(5): 893 - 900

[29] Shen T. A design method of nonlinear robust H_∞ controller with adaptive mechanism [A]. Proceedings of 29th International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications [C], Tokyo, 1997, 223 - 228

[30] La Salle J P. The Stability of Dynamical Systems [M]. Berlin: Hamilton Press, 1976

本文作者简介

慕春棣 1946年生.清华大学自动化系教授.目前研究方向有鲁棒控制,智能控制及其在空间运动体的应用.

梅生伟 1964年生.1989年于清华大学数学系获硕士学位,1996年于中国科学院系统科学研究所获运筹学与控制论博士学位,现为清华大学电机系副教授.研究方向为鲁棒控制,神经网络在控制中的应用,电力系统自动化.

申铁龙 1957年生.1986年于东北重型机械学院获工学硕士学位,1989年赴日本留学,1992年于日本上智大学获工学博士学位.目前研究领域为H_∞最优控制,鲁棒控制理论及应用.