

基于台劳展式的矩形 Reissner-Mindlin 板元*

陈 绍 春

(郑州大学数学系)

RECTANGULAR REISSNER-MINDLIN PLATE ELEMENTS BASED ON TAYLOR'S FORMULA

Chen Shao-chun

(Mathematics Department, Zhengzhou University)

Abstract

Using Taylor's formula in calculus we give a mathematical analysis of the locking behaviour exhibited in the finite element approximation of Reissner-Mindlin plate as the thickness of the plate tends to zero. Based on this analysis we present a simple and efficient method to construct locking free rectangular Reissner-Mindlin plate elements. Two rectangular Reissner-Mindlin plate elements based on this method—ETF4 and ETF9—are presented. Numerical results show that ETF4 and ETF9 are locking free and have good convergence behaviour.

1. 引 言

Reissner-Mindlin 板模型^[1,2]放弃了经典板模型的 Kirchhoff 假说,考虑了剪切变形,能应用于更广泛的板问题。Reissner-Mindlin 板模型的挠度与转角是相互独立的,单元只需具有 C^0 连续性,这一点优于需要具有 C^1 连续性的 Kirchhoff 板元,但一个严重困难是普通 C^0 元,尤其是低阶 C^0 元,当板厚趋于零时不收敛,这就是所谓的自锁现象 (locking)。近年来,研究避免自锁现象的 Reissner-Mindlin 模型板元吸引了不少的注意力,如选择降阶数值积分元 (selective and reduced integration)^[3,4] 和混合插值元 (MITC)^[5,6] 等。

利用台劳展式,本文给出自锁现象的数学分析。基于这一分析,提出构造无自锁现象的 Reissner-Mindlin 矩形板元的一个简单而有效的方法。该方法将剪切应变分成两部分,一部分当板厚趋于零时对应于一定的 Kirchhoff 条件,另一部分是转角的一些高阶项,这一部分产生自锁现象。若使板厚趋于零,这部分消失,即能获得满意的数值结果。基于这一方法,本文构造一个 4 节点和一个 9 节点矩形 Reissner-Mindlin 模型板元,并给

* 1992年6月23日收到。

出数值结果。数值实验表明,两元具有很好的收敛性。

到目前为止, Reissner-Mindlin 板元的完整的收敛性分析, 见[7—8]。

2. 基于台劳展式的 Reissner-Mindlin 板元

考虑 Reissner-Mindlin 模型的板弯曲问题^[9]: 求挠度 $w \in H_0^1(\Omega)$, 转角 $\beta = (\beta_x, \beta_y) \in [H_0^1(\Omega)]^2$, 使下列板的能量泛函达到极小:

$$\begin{aligned}
 J(w, \beta) = & \frac{1}{2} \frac{E}{12(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 & + \left. \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \\
 & + \frac{1}{2} \frac{Ek}{2(1+\nu)t^2} \int_{\Omega} \left[\left(\beta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\beta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
 & - \int_{\Omega} f w dx dy, \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

其中 E 是杨式模量, ν 是泊松比, t 是板厚, k 是剪力校正因子, 一般取 $k = \frac{5}{6}$, Ω 是板的中面占有的平面区域, f 是横向荷载。(2.1) 的第一项是弯曲应变能, 第二项是剪切应变能。

设有限元空间是 $W_h \times B_h$, $W_h \subset H_0^1(\Omega)$, $B_h \subset [H_0^1(\Omega)]^2$, $\Omega = \bigcup_i K_i$, K_i 是单元, 则离散解 $(w_h, \beta_h) \in W_h \times B_h$ 使下列泛函达到极小:

$$\begin{aligned}
 J(w_h, \beta_h) = & \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \frac{E}{12(1-\nu^2)} \int_{K_i} \left[\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 \right. \right. \\
 & + 2\nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \left. \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \\
 & + \frac{1}{2} \frac{Ek}{2(1+\nu)t^2} \int_{K_i} \left[\left(\beta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\beta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
 & \left. - \int_{K_i} f w dx dy \right\}, \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

其中仍记 $\beta_u = (\beta_x, \beta_y)$, $w_h = w$, 以下均采用这种简便记法。

设 K 是一般矩形元, (x_0, y_0) 是 K 的中心点, $Q_{m,n}(K)$ 表示 K 上对 x 次数不超过 m , 对 y 次数不超过 n 的多项式的集合。假定 $Q_{m,n}(K)$ 的维数是 M , 在 K 上 $w, \beta_x, \beta_y \in Q_{m,n}(K)$, 则可将其表成

$$\begin{cases} w = s_1 + s_2 x + s_3 y + \cdots + s_M x^m y^n, \\ \beta_x = b_1 + b_2 x + b_3 y + \cdots + b_M x^m y^n, \\ \beta_y = c_1 + c_2 x + c_3 y + \cdots + c_M x^m y^n. \end{cases} \tag{2.3}$$

因为 w, β_x, β_y 是多项式, 所以, 由二元函数的台劳展式, 它们可精确表示如下:

$$\begin{cases} w = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{1}{i!j!} \left(\frac{\partial^{i+j} w}{\partial x^i \partial y^j} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^j, \\ \beta_x = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{1}{i!j!} \left(\frac{\partial^{i+j} \beta_x}{\partial x^i \partial y^j} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^j, \\ \beta_y = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{1}{i!j!} \left(\frac{\partial^{i+j} \beta_y}{\partial x^i \partial y^j} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^j. \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 $\left(\frac{\partial^{i+j} w}{\partial x^i \partial y^j} \right) (x_0, y_0)$, $\left(\frac{\partial^{i+j} \beta_x}{\partial x^i \partial y^j} \right) (x_0, y_0)$, $\left(\frac{\partial^{i+j} \beta_y}{\partial x^i \partial y^j} \right) (x_0, y_0)$ 分别是(2.3)的系数 $s_l, b_l,$

c_l ($1 \leq l \leq M$) 的线性组合。这样

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n \frac{1}{i!j!} \left(\frac{\partial^{i+j+1} w}{\partial x^{i+1} \partial y^j} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^j, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i!j!} \left(\frac{\partial^{i+j+1} w}{\partial x^i \partial y^{j+1}} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^j. \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{cases} \beta_x - \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n \frac{1}{i!j!} \left[\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \left(\beta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] (x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^i (y - y_0)^j \\ \quad + \sum_{j=0}^n \frac{1}{m!j!} \left(\frac{\partial^{m+j} \beta_x}{\partial x^m \partial y^j} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^m (y - y_0)^j, \\ \beta_y - \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i!j!} \left[\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \left(\beta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] (x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^j \\ \quad + \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!(n!) } \left(\frac{\partial^{i+n} \beta_y}{\partial x^i \partial y^n} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^n. \end{cases} \quad (2.5)$$

当板厚 $t \rightarrow 0$ 时, (2.2) 的第二项相当于一个罚函数项, 由此得 $\left(\beta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \rightarrow 0,$

$\left(\beta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \rightarrow 0.$ 由(2.5)式, 即得

$$\begin{cases} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \left(\beta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) (x_0, y_0) \rightarrow 0, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq j \leq n, \\ \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \left(\beta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) (x_0, y_0), \quad 0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq n-1, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^{m+j} \beta_x}{\partial x^m \partial y^j} (x_0, y_0) \rightarrow 0, \quad 0 \leq j \leq n, \quad \frac{\partial^{i+n}}{\partial x^i \partial y^n} (x_0, y_0) \rightarrow 0, \quad 0 \leq i \leq m. \quad (2.7)$$

(2.6)是在K的中心点 (x_0, y_0) 上直到某个阶数的 Kirchhoff 条件。一定的 Kirchhoff 条件不仅不引起自锁, 而且是薄板时收敛性所需要的。问题是(2.7)式使得当板厚 $t \rightarrow 0$ 时低阶元的弯曲能量即(2.2)的第一项严重失真, 以至变为零, 即条件(2.7)引起自锁现象。我们举一个简单的例子, 更清楚地说明这一点。

线性 Timoshenko 梁元。Timoshenko 梁模型的能量泛函是

$$J = \frac{D}{2} \int_I \phi'^2 dx + \frac{c}{2t^2} \int_I (\phi - w')^2 dx - \int_I g w dx, \quad (2.8)$$

其中 D, c 是弹性常数, w 是挠度, ϕ 是转角. (2.8) 是 (2.1) 的一维情况, 第一项是弯曲能量, 第二项是剪切能量. 设单元 K 是 $[x_1, x_2]$, 中点 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 线性元插值函数是

$$w = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} w^1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} w^2, \quad \phi = \left(\frac{1}{2} - \frac{x - x_0}{x_2 - x_1}\right) \phi^1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{x - x_0}{x_2 - x_1}\right) \phi^2, \quad w' = \frac{w^2 - w^1}{x_2 - x_1},$$

$$\phi' = \frac{\phi^2 - \phi^1}{x_2 - x_1}, \quad \text{这样}$$

$$\phi - w' = \left[\frac{\phi^1 + \phi^2}{2} - \frac{w^2 - w^1}{x_2 - x_1} \right] + \frac{\phi^2 - \phi^1}{x_2 - x_1} (x - x_0).$$

当 $t \rightarrow 0$ 时, 由 $(\phi - w') \rightarrow 0$ 得 $\left(\frac{\phi^1 + \phi^2}{2} - \frac{w^2 - w^1}{x_2 - x_1}\right) \rightarrow 0, \frac{\phi^2 - \phi^1}{x_2 - x_1} \rightarrow 0$. 第一个式子即 $(\phi(x_0) - w'(x_0)) \rightarrow 0$, 是在 x_0 点的 Bernoulli 条件, 它类似于板的 Kirchhoff 条件, 此式相当于 (2.6) 式. 第二个式子 $\frac{\phi^2 - \phi^1}{x_2 - x_1} \rightarrow 0$ 即 $\phi' \rightarrow 0$, 此式相当于 (2.7) 式, 它使得梁的弯曲能量 $\frac{D}{2} \int_I \phi'^2 dx \rightarrow 0$, 即产生自锁现象. 类似的情形发生在线性三角形和双线性矩形等的 Reissner-Mindlin 板元.

由以上分析知, 要想从 c^0 元得到无自锁现象的 Reissner-Mindlin 板元, 只需在计算剪切能量时将 β_x, β_y 的表达式中对应 (2.6) 式的项保留而使对应 (2.7) 的项当 $t \rightarrow 0$ 时消失即可. 因此, 我们提出如下的构造矩形 Reissner-Mindlin 模型板元的方法.

设单元 K 上 w, β_x, β_y 的表达式如 (2.3), (2.4), 当单元刚度矩阵生成时, 用通常的方法计算弯曲应变能, 但计算剪切能量时, $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ 不变, 而 β_x, β_y 代之以 $\bar{\beta}_x, \bar{\beta}_y$, 表达式是

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\beta}_x &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n \frac{1}{i!j!} \left(\frac{\partial^{i+j} \beta_x}{\partial x^i \partial y^j} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^j \\ &\quad + \alpha \sum_{j=0}^n \frac{1}{m!j!} \left(\frac{\partial^{m+j} \beta_x}{\partial x^m \partial y^j} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^m (y - y_0)^j, \\ \bar{\beta}_y &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i!j!} \left(\frac{\partial^{i+j} \beta_y}{\partial x^i \partial y^j} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^j \\ &\quad + \alpha \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!n!} \left(\frac{\partial^{i+n} \beta_y}{\partial x^i \partial y^n} \right) (x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^n, \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

其中表达式的第一项是对应 (2.6) 的项, 第二项是对应 (2.7) 的项, α 是收敛性因子, 可取成 $\alpha = t^2/(t^2 + c_1 h)$ 或 $\alpha = t^2/(t^2 + c_2)$ 等形式, c_1, c_2 是常数, 使得 $t \rightarrow 0$ 时, $\alpha \rightarrow 0$, 且 α/t^2 不趋于无穷大, 而 t 充分大时 α 接近 1. 这样能通用于薄板及中厚板, 仅对薄板来说可方便地取 $\alpha = 0$. 这样, 当 $t \rightarrow 0$ 时, 由 $\left(\bar{\beta}_x - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \rightarrow 0, \left(\bar{\beta}_y - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \rightarrow 0$ 得

Kirchhoff 条件(2.6), 而由于 α/r^2 不趋于无穷大, 引起自锁现象的条件(2.7)自动移去。

实际应用中通常采用等参方法^[10], 参考元一般取为中心在原点的正方形, 这时 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, (2.3)就是在(0,0)点的台劳展式, $\bar{\beta}_x, \bar{\beta}_y$ 可简便地表示成

$$\bar{\beta}_x = \beta_{x1} + \alpha\beta_{x2}, \quad \bar{\beta}_y = \beta_{y1} + \alpha\beta_{y2}, \quad (2.10)$$

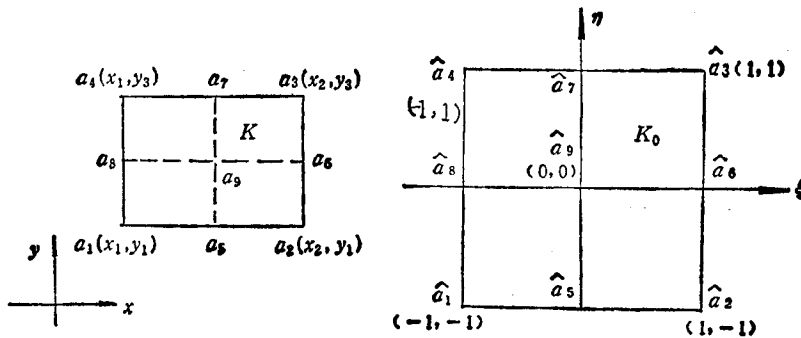
其中 β_{x1} 是 β_x 中出现在 $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ 表达式中的项, β_{x2} 是 β_x 其余的高阶项, β_{y1} 是 β_y 中出现在 $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ 表达式中的项, β_{y2} 是 β_y 其余的高阶项。显然此方法也可应用于 ω 的插值函数空间与 β_x, β_y 的插值函数空间不一致的情况。

基于台劳展式的构造矩形 Reissner-Mindlin 板元的方法是一个一般方法, 任何 c^0 矩形元都可用此法构造出一个无自锁现象的 Reissner-Mindlin 板元。此方法同样可用于构造三角形 Reissner-Mindlin 模型板元。

3. ETF4 和 ETF9 元

本节构造两个基于台劳展式的矩形 Reissner-Mindlin 板元——4 节点元 ETF4 和 9 节点元 ETF9, ETF 指的是 Element based on Taylor's formula

设一般矩形元 K 在平面 (x, y) 上, 参考元 K_0 在平面 (ξ, η) 上, K_0 为中心在原点、边长为 2 的正方形(见下图)。



从 K 到 K_0 的仿射变换是

$$x = x_1 \frac{(1-\xi)}{2} + x_2 \frac{(1+\xi)}{2}, \quad y = y_1 \frac{(1-\eta)}{2} + y_2 \frac{(1+\eta)}{2}.$$

变换的 Jacobi 是对角阵, Jacobi 行列式是常数, $\det(J) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \Delta x \Delta y$, 这里 $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$. 同时 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{2}{\Delta y} \frac{\partial}{\partial \eta}$.

(1) ETF4 元

形函数空间是双线性多项式空间 $Q_{1,1}(K_0)$, 自由度是单元 4 个顶点上的函数值, 设

$$\begin{cases} w = s_1 + s_2\xi + s_3\eta + s_4\xi\eta, \\ \beta_x = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta, \\ \beta_y = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta, \end{cases} \quad (3.1)$$

则 $s_1 = \frac{1}{4}(w^1 + w^2 + w^3 + w^4)$, $s_2 = \frac{1}{4}(-w^1 + w_2 + w^3 - w^4)$, $s_3 = \frac{1}{4}(-w^1 - w^2 + w^3 + w^4)$, $s_4 = \frac{1}{4}(w^1 - w^2 + w^3 - w^4)$, $w^i = w(a_i)$, b_l, c_l ($1 \leq l \leq 4$) 的表达式与 s_l 的类似:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{2}{\Delta x} (s_2 + s_4\eta), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2}{\Delta y} \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{2}{\Delta y} (s_3 + s_4\xi).$$

出现在 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 中的项是 1 和 η , 出现在 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 中的项是 1 和 ξ , K_0 中心点在原点, 所以(3.1)就是在中心点的台劳展式. 这样, 对应于(2.10)式, $ETF 4$ 元的 $\bar{\beta}_x, \bar{\beta}_y$ 的表达式是

$$\begin{cases} \bar{\beta}_x = (b_1 + b_3\eta) + \alpha(b_2\xi + b_4\xi\eta), \\ \bar{\beta}_y = (c_1 + c_2\xi) + \alpha(c_3\eta + c_4\xi\eta). \end{cases} \quad (3.2)$$

(2) $ETF 9$ 元

形函数空间是双 2 次多项式空间 $Q_{2,2}(K_0)$, 自由度是单元 4 个顶点、4 边中点及中心点的函数值. 设

$$\begin{cases} w = s_1 + s_2\xi + s_3\eta + s_4\xi^2 + s_5\xi\eta + s_6\eta^2 + s_7\xi^2\eta + s_8\xi\eta^2 + s_9\xi^2\eta^2, \\ \beta_x = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi^2 + b_5\xi\eta + b_6\eta^2 + b_7\xi^2\eta + b_8\xi\eta^2 + b_9\xi^2\eta^2, \\ \beta_y = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi^2 + c_5\xi\eta + c_6\eta^2 + c_7\xi^2\eta + c_8\xi\eta^2 + c_9\xi^2\eta^2, \end{cases} \quad (3.3)$$

则 $s_1 = w^9$, $s_2 = \frac{1}{2}(w^7 - w^8)$, $s_3 = \frac{1}{2}(w^7 + w^8)$, $s_4 = \frac{1}{2}(w^6 + w^9 - 2w^9)$, $s_5 = \frac{1}{4}(w^1 - w^2 + w^3 - w^4)$, $s_6 = \frac{1}{2}(w^5 + w^7 - 2w^9)$, $s_7 = \frac{1}{4}(-w^2 - w^2 + w^3 + w^4 + 2w^5 - 2w^7)$, $s_8 = \frac{1}{4}(-w^1 + w^2 + w^3 - w^4 - 2w^6 + 2w^8)$, $s_9 = \frac{1}{4}(w^1 + w^2 + w^3 + w^4 - 2w^5 - 2w^6 - 2w^7 - 2w^8 + 4w^9)$, b_i, c_i ($1 \leq i \leq 9$) 的表达式和 s_i 的类似:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{2}{\Delta x} (s_2 + 2s_4\xi + s_5\eta + 2s_7\xi\eta + s_8\eta^2 + 2s_9\xi\eta^2), \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{2}{\Delta y} (s_3 + s_5\xi + 2s_6\eta + s_7\xi^2 + 2s_8\xi\eta + 2s_9\xi^2\eta). \end{aligned}$$

出现在 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 中的项是 $1, \xi, \eta, \xi\eta, \eta^2, \xi\eta^2$, 而出现在 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 中的项是 $1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \xi^2\eta$, 这样对应于(2.10)式, $ETF 9$ 元的 $\bar{\beta}_x, \bar{\beta}_y$ 的表达式是

$$\begin{cases} \bar{\beta}_x = (b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_5\xi\eta + b_6\eta^2 + b_8\xi\eta^2) + \alpha(b_4\xi^2 + b_7\xi^2\eta + b_9\xi^2\eta^2), \\ \bar{\beta}_y = (c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi^2 + c_5\xi\eta + c_7\xi^2\eta) + \alpha(c_6\eta^2 + c_8\xi\eta^2 + c_9\xi^2\eta^2). \end{cases} \quad (3.4)$$

4. 数值结果

考虑一个简单的例子: 均布荷载下的四周简支方板. 取方板的长度为 1, 泊松比

$\nu = 0.3$ 。为检验有无自锁现象,分别取板厚 $t = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ 。由于对称性,只离散 $\frac{1}{4}$ 板。输出结果是板中心的挠度 w , 弯矩 M_x, M_y , 和板边中点的剪力 q_x, q_y , 它们的解析值可见[11]。相对误差列于下列表中,其中 α 是(3.2),(3.4)中的收敛性因子。从表中看出, $t \rightarrow 0$ 时 *ETF 4* 元和 *ETF 9* 元均无自锁现象,且均有很好的收敛性。*ETF 4* 元,挠度与弯距的精度好于剪力,而有趣的是 *ETF 9* 元,剪力的精度却好于挠度和弯距。两元比较,在对应的剖分情况下,*ETF 4* 元的挠度和弯距优于 *ETF 9* 元,而 *ETF 9* 元的剪力优于 *ETF 4* 元。从计算实践看,收敛性因子 α 的确对数值结果有很大影响, t 小时 α 的值不能偏大。

表1 *ETF 4* 元相对误差 ($\alpha = t^2/(t^2 + h)$)

	t	1/4 板剖分			
		2×2	4×4	8×8	16×16
w	10^{-2}	0.01970	0.006059	0.001919	0.0007704
	10^{-3}	0.01879	0.005178	0.001305	0.0002136
	10^{-4}	0.01878	0.005170	0.001144	0.0002080
M	10^{-2}	0.004958	0.0003407	0.00006603	0.00001551
	10^{-3}	0.004936	0.0003474	0.00006885	0.00002232
	10^{-4}	0.004936	0.0003474	0.00006885	0.00002232
q	10^{-2}	0.4194	0.2382	0.1288	0.06243
	10^{-3}	0.4194	0.2381	0.1288	0.06243
	10^{-4}	0.4194	0.2381	0.1288	0.06243

表2 *ETF 9* 元相对误差 ($\alpha = t^2/(t^2 + 0.1)$)

	t	1/4 板剖分			
		1×1	2×2	4×4	8×8
w	10^{-2}	0.8794	0.1821	0.03878	0.007445
	10^{-3}	0.8794	0.1814	0.03804	0.006886
	10^{-4}	0.8794	0.1814	0.03803	0.006881
M	10^{-2}	0.7193	0.1255	0.02713	0.006517
	10^{-3}	0.7204	0.1257	0.02718	0.006525
	10^{-4}	0.7204	0.1257	0.02718	0.006525
q	10^{-2}	0.2574	0.05733	0.004410	0.0009425
	10^{-3}	0.2589	0.05951	0.006660	0.0009976
	10^{-4}	0.2590	0.05952	0.006684	0.001021

注。为提高 *MITC4*^[5] 等元的精度,[12]提出在计算剪切能量项时,其中的因子 $1/t^2$ 代之以 $1/(t^2 + \alpha_0 h^2)$, α_0 是稳定性因子,可取为 $\alpha_0 \in [0.1, 1]$ 。在上例中,我们将这一改进措施用于 *ETF 4* 和 *ETF 9* 元,精度也有提高。这一技巧的理论分析尚待给出。

本文是作者在访问德国汉诺威大学建筑与计算力学研究所时完成的,曾与 E. Stein 教授进行过有益的讨论,特此致谢。

参 考 文 献

- [1] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 12(1945), 69—76.
- [2] R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 18(1951), 31—38.
- [3] T. J. R. Hughes, M. Cohen, M. Haroun, Reduced and selective integration techniques in finite element analysis of plates, *Nucl. Engng. Design.*, 46(1978), 203—222.
- [4] T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, W. Kanoknuchai, A simple and efficient finite element for plate bending, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 11(1977), 1529—1547.
- [5] K. J. Bathe, E. N. Dvorkin, A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 21(1985), 367—383.
- [6] K. J. Bathe, F. Brezzi, S. W. Cho, The MITCT and MITC9 plate bending elements, *Compt. Struct.*, 30(1989), 797—814.
- [7] K. J. Bathe, F. Brezzi, On the convergence of a four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation, Proc. MAFELAD. V. Academic Press, London, 1985, 491—503.
- [8] D. Arnold, R. Falk, A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate, *SIAM. J. Numer. Anal.*, 26(1989), 1276—1290.
- [9] F. Brezzi, M. Fortin, Numerical approximation of Mindlin-Reissner plates, *Math. Comp.*, 47(1986), 151—158.
- [10] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, England Cliffs, New Jersey, 1982.
- [11] S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd edn, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [12] R. Stenberg, T. Vihinen, Calculations with some linear elements for Reissner-Mindlin plates, Proceedings of the European Conference on new advances in computational structural mechanics, D. Ladeveze (Ed.), 1991, 505—511.